



CFD 复习整理

目 计算流体力学

物质导数：(要求会推导)

$$\frac{DB}{Dt} = u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} + w \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial t}$$

思路：利用泰勒展开，然后取极限。



动量方程 (记忆)

x 方向:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

y 方向

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

z 方向

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$$



无粘流欧拉方程

连续性方程

非守恒形式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

守恒形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

动量方程

非守恒形式

x 方向:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

y 方向:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

z 方向:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

守恒形式

x 方向:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

y 方向

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

z 方向

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

能量方程

非守恒形式:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \dot{q} - \frac{\partial(\rho u p)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v p)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w p)}{\partial z} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V}$$

守恒形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right] = \rho \dot{q} - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} + \rho f \cdot \mathbf{V}$$



三类边界条件

1. Dirichlet: 未知函数在边界上的数值

$$T = c$$

2. Neumann: 未知函数在边界外法线方向的导数

$$\frac{\partial T}{\partial n} = c$$

3. Robin: 给出未知函数在边界上的函数值和外法线方向导数的线性组合

$$a \frac{\partial T}{\partial n} + bT = c$$



强守恒方程

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = J - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z}}$$

其核心特点是所有物理量都被包含在导数形式中, 没有任何流动变量单独留在导数之外

解向量

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \end{array} \right\}$$

一旦接触解向量, 按如下方式接触初始变量:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho \\ u &= \frac{\rho u}{\rho} \\ v &= \frac{\rho v}{\rho} \\ w &= \frac{\rho w}{\rho} \\ e &= \frac{\rho(e + V^2/2)}{\rho} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\end{aligned}$$



拟线性偏微分方程

特征线法

给定拟线性方程组

$$\begin{aligned}a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} &= f_1 \\ a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} &= f_2\end{aligned}$$

其中 u 和 v 都是未知函数，可以视作 xy 平面上的连续的速度场，其全微分满足

$$\begin{aligned}du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\end{aligned}$$

将上述四个线性方程组成一个方程组

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ du \\ dv \end{bmatrix}$$

用 $[A]$ 表示第一个系数矩阵，如果我们用 [Cramer 法则](#) 求解 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ，则引入矩阵：

$$[B] = \begin{bmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ du & dy & 0 & 0 \\ dv & 0 & dx & dy \end{bmatrix}$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的解为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|B|}{|A|} \quad (1)$$

为了求取上述式子的实际数值，我们必须给定矩阵 $[A], [B]$ 中的 du, dv, dx, dy 。假定我们选定某个方向，此时 $|A| = 0$ ，那么我们就无法确定 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ，此时定义通过这个方向的曲线为通过特定点 P 的**特征线**。我们将 $|A|$ 展开可得二次方程

$$(a_1c_2 - a_2c_1) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) \frac{dy}{dx} + (b_1d_2 - b_2d_1)$$

这是一个关于 $\frac{dy}{dx}$ 的二次方程，对于 xy 平面上的任意一点，方程给出一条曲线的斜率，但是沿着这条曲线 u, v 的导数是不确定的，记

$$\begin{aligned} a &= (a_1c_2 - a_2c_1) \\ b &= -(a_1d_2 - a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1) \\ c &= (b_1d_2 - b_2d_1) \end{aligned}$$

求根公式给出解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

二次方程中判别式 $D = b^2 - 4ac$ ，其决定了偏微分方程的不同数学特征

$D > 0$	通过每个点都有两条不同的实特征线，方程组称为双曲型方程组
$D = 0$	方程组称为抛物型方程
$D < 0$	虚特征线，方程组称为椭圆型方程组

但实际上，单单 $|A| = 0$ 只是决定出了式 (1) 的解为无穷大，但我们希望式 (1) 的解式不确定的，因此也要求 $|B| = 0$ 。该行列式给出关于未知函数 u 和 v 的一个常微分方程，我们称为相容方程，求解一个常微分方程比求解偏微分方程容易。

特征线法

特征线可用求解拟线性偏微分方程，其基本思想是通过把双曲线型的准线性偏微分方程转化为两组常微分方程，再对常微分方程进行求解。两组常微分方程中的一组用于定义特征线，另一组用以描述解沿给定特征线变化

特征值法

考虑

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} + d_1 \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 \frac{\partial v}{\partial x} + d_2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

取列向量

$$W = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

因此方程组可简写为

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} + \begin{bmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \triangleq [K] \frac{\partial W}{\partial x} + [M] \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

左乘 $[K]$ 的逆矩阵得

$$\frac{\partial W}{\partial x} + [K]^{-1}[M] \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \triangleq \frac{\partial W}{\partial x} + [N] \frac{\partial W}{\partial y} = 0$$

根据 $[N]$ 的特征值便可以确定方程组的类型，如果特征值为实数，方程便为双曲型。



偏微分方程的性质

双曲型方程

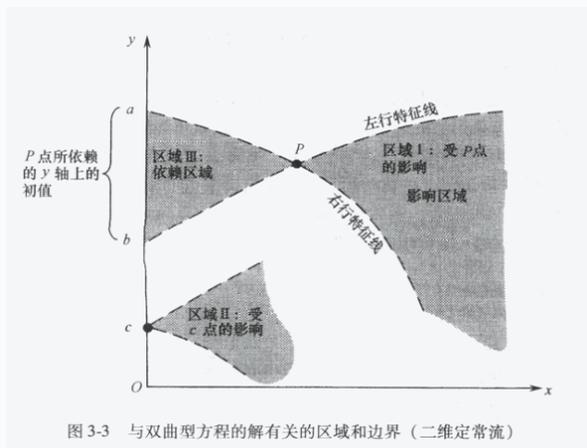


图 3-3 与双曲型方程的解有关的区域和边界（二维定常流）

双曲型方程有关的区域和边界

在 xy 平面上取点 P 及穿过这个点的两条（实）特征线，那么 P 点的信息只能影响到这两条特征线之间的区域，记该区域 I 为 P 点的影响区域，将特征线反向延长交 y 轴于 a, b 两点，那么 P 点处 u, v 的值仅依赖于边界 a, b 之间的部分。取 ab 范围外一点 c ，则 P 点不会受到 c 处的信息，因为其不在 c 的影响区域 II, P 处的特性只取决于依赖区域 III 中发生的事情

有双曲型方程决定的流场可以“推进”求解，计算从给定的初始条件开始，沿着 x 轴方向一步步推进，逐步求解流场。

抛物型方程

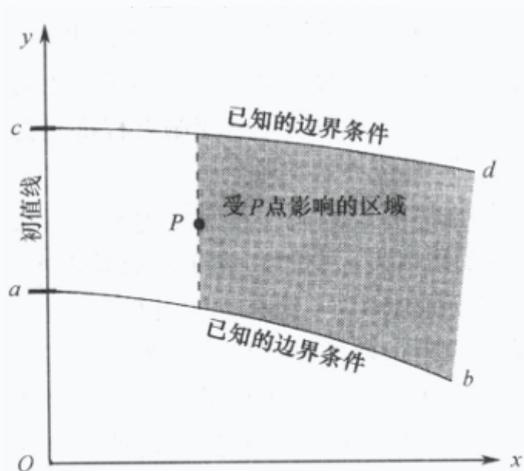


图 3-8 与二维抛物型方程的解有关的区域和边界

抛物型方程有关的区域和边界

对于抛物型方程，只有一个特征方向通过 P 点，假定初始条件沿 ac 给定的，而沿曲线 ab 和 cd ，边界条件实已知的，通过 P 点的特征方向用一条铅垂线给出，这样 P 点的信息影响到铅垂特征线右侧包含在这两个边界之间的整个区域，即图中阴影处

抛物型方程和双曲型方程一样也适合与推进解

椭圆型方程

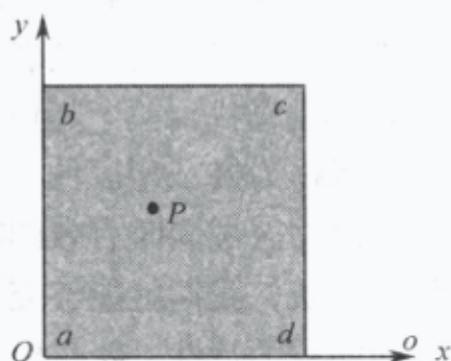


图 3-13 与二维椭圆型方程的解有关的区域和边界

椭圆型方程有关的区域和边界

对于椭圆型方程，由于特征线是虚线，因此与特征线有关的解法对于椭圆型方程来说是不适用的，对于椭圆型方程，没有有限的影响区域和依赖区域，信息可以向任何方向传播到任何地方。在 P 点做微小扰动，这种扰动在整个区域内都能感受到，同时， P 点的解也受到整个封闭边界 $abcd$ 的印象，这样， P 点的解需要与流场中所有的点同时求解，涉及到椭圆型方程常常被称为“陪审团”问题，因为区域内的解依赖于所有边界，必须在整个边界 $abcd$ 上给定边界条件

泰勒展开：

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x}_{\text{有限差分}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots}_{\text{截断误差}}$$

- 一阶向前差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

- 一阶向后差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

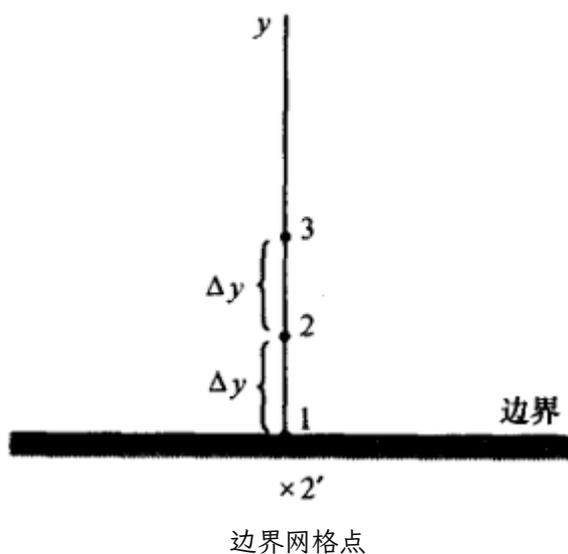
- 中心差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

高阶有限差分可通过不同位置的泰勒展开做线性组合可得。一般来说对于 k 阶差分，一般需要 $k + 1$ 个网格点上的信息。（要会推导）



单侧边界条件（要求掌握）



假定左图所示的边界上 u 可以表示为多项式

$$u = a + by + cy^2$$

在网格点 1, $u_1 = a$

在网格点 2, $u_2 = a + b\Delta y + c(\Delta y)^2$

在网格点 3, $u_3 = a + b(2\Delta y) + c(2\Delta y)^2$

上式联立求解可以求出

$$b = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y}$$

将 u 对 y 求导可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy$$

在 $y = 0$ 处有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = b$$

我们最终得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2\Delta y}$$

这个式子称为边界上导数的单侧表达式，因为其只用到了边界一侧的网格点。运用泰勒级数也可以得到相似的结果



显示方法和隐式方法（要求掌握）

热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

差分方程：

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

显示方法：每一个差分方程只包含一个未知数，从而这个未知数可以用直接计算的方式显式地求解。

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

隐式方法：对于排列在同一时间层所有网格点上的未知量，必须将他们联立同时求解，才能求出这些未知量。

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\frac{T_{i+1}^{n+1} + T_{i+1}^n}{2} - 2\left(\frac{T_i^{n+1} + T_i^n}{2}\right) + \frac{T_{i-1}^{n+1} + T_{i-1}^n}{2}}{(\Delta x)^2}$$

也称为Crank-Nicolson格式

$$\frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} T_{i-1}^{n+1} - \left[1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}\right] T_i^{n+1} + \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} T_{i+1}^{n+1} = -T_i^n - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

（要求能写出如下矩阵）

为了简化书写，采用如下表达式：

$$A = \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2}; B = 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}; K_i = -T_i^n - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

则可转化为：

$$AT_{i-1}^{n+1} - BT_i^{n+1} + AT_{i+1}^{n+1} = K_i$$

假定我们选取七个网格点（第一个和第七个网格点都是边界条件），则中间五个网格点在第 $n + 1$ 时间层的信息由求解如下矩阵给出：

$$\begin{bmatrix} -B & A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & A & 0 & 0 \\ 0 & A & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -B & A \\ 0 & 0 & 0 & A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K'_6 \end{bmatrix}$$

其中

$$K'_2 = K_2 - AT_1 \quad K'_6 = K_6 - AT_7$$

都是已知量



冯诺依曼稳定性（要求掌握）

误差与稳定性分析

偏微分方程的数值解受到两种误差影响：

- 离散误差 偏微分方程的精确解与相应的差分方程的精确解之间的差
- 舍入误差 对数值进行多次重复计算产生的数值误差

记偏微分方程的精确解 A ，差分方程的精确解 D ，在某个具有有限精度的计算机上实际计算出来的解 N ，则离散误差 $A - D$ ，舍入误差 $\varepsilon = N - D$

使用有限差分方法进行计算时，若任意时间步的误差不会导致其后计算结果的发散，则可称该有限差分法是数值稳定的。如果误差随着进一步计算降低最终消失，该算法被认为稳定；若误差在进计算中保持为常量，则认为该算法“中性稳定”。但如果误差随着进一步计算增长，结果发散，则数值方法不稳定。

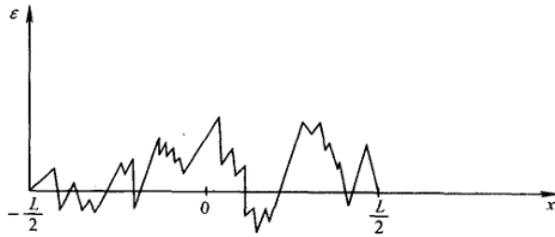
舍入误差满足差分方程

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

要求解是稳定的，则 ε_i 应满足

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} \right| \leq 1$$

一般来说，舍入误差 ε 是一种完全随机的分布（如左图），在区域两端 $\varepsilon = 0$ ，这是因为在区域的两个端点处都有指定的边界条件，所有没有任何误差，边界条件总是提供精确的已



舍入误差

知值

将 ε 展开成 Fourier 级数(一般而言三个相邻值为零的点可以确定一个三角函数)

$$\varepsilon(x) = \sum_m A_m e^{ik_m x}$$

如果在区间上分布了 $N + 1$ 个网格点, 他们共有 N 个子区间, 此时 m 取 $N/2$, 上式可写作:

$$\varepsilon(x) = \sum_m^{N/2} A_m e^{ik_m x}$$

将定振幅是时间的函数, 且随时间按指数变化

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=1}^{N/2} e^{at} e^{ik_m x}$$

为简化研究, 取级数中的一项 $\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x}$ 将这个式子带入到 ε 满足的差分方程:

$$\frac{e^{\alpha(t+\Delta t)} e^{ik_m x} - e^{\alpha t} e^{ik_m x}}{\Delta t} = \alpha \frac{e^{\alpha t} e^{ik_m(x+\Delta x)} - 2e^{\alpha t} e^{ik_m x} + e^{\alpha t} e^{ik_m(x-\Delta x)}}{(\Delta x)^2}$$

利用欧拉公式和三角函数性质可得

$$e^{\alpha \Delta t} = 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2}$$

因此为了得到稳定解

$$\left| \frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} \right| \leq 1 = |e^{a\Delta t}| = \left| 1 - \frac{4a\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} \right| \leq 1$$

上式给出稳定解的条件:

$$\frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

如果网格的划分不满足上述不等式, 也就意味着在计算过程中产生的误差会随着时间推进而增长, 从而淹没结果也就是“算爆了”。

而对于隐式形式, 引入比较简单的全隐格式 (其实就是将显式方法中的向前差分改成向后差分):

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

而此时对应的

$$e^{a\Delta t} = \frac{1}{1 + \frac{4\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{k_m\Delta x}{2}}$$

显然，隐式形式永远满足稳定解要求。

Summary

以上这种分析方法称为冯诺依曼稳定性分析（也称傅里叶稳定性分析，因为其基于对数值误差的傅里叶分解）这种方法只适用于某些特殊差分法：偏微分系统需要线性，常系数，满足周期性边界条件，只有两个独立变量，差分法中最多含两层时间步。

一阶波动方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

如果考虑如下差分方程：

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

冯诺依曼稳定性分析表明无论 Δt 取何值，方程总是给出不稳定的解。但是如果采用 Lax 方法：

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2}$$

也就是取 $u_i^n = \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n)$ 如果依旧假定 $\varepsilon_m(x, t) = e^{\alpha t} e^{ik_m x}$ ，则它的放大因子为：

$$e^{\alpha t} = \cos(k_m \Delta x) - iC \sin(k_m \Delta x)$$

其中 $C = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 稳定性要求 $|e^{\alpha t}| \leq 1$ 给出

$$C = |c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

C 称为柯朗数，该式子称为 [Courant-Friedrichs-Lewy 条件](#) 记作 CFL 条件。CFL 条件要求柯朗数小于1（常取0.8，0.9）

该条件背后的原理是，例如，当一个波在离散的空间网格上传播时，如果我们希望在等时间间隔的离散时间步上计算其振幅，那么这个时间步长必须小于波到达相邻网格点所需的时间。由此可以推论，当网格点之间的间距减小时，时间步长的上限也会随之降低。

本质上，数值方法的依赖域(**domain of dependence**)必须覆盖解析解的依赖域，以确保数值计算能够访问所有必要的信息来正确构造解。数值依赖域由初始条件和数值近似方案

的参数决定，而解析依赖域则是指那些对某一点的准确解有影响的初始条件范围。如果数值依赖域未能完全包含解析依赖域，则计算过程中可能会丢失关键信息，影响数值方案的准确性和稳定性。

二阶波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

对应特征线：

$$x = \begin{cases} ct \\ -ct \end{cases}$$

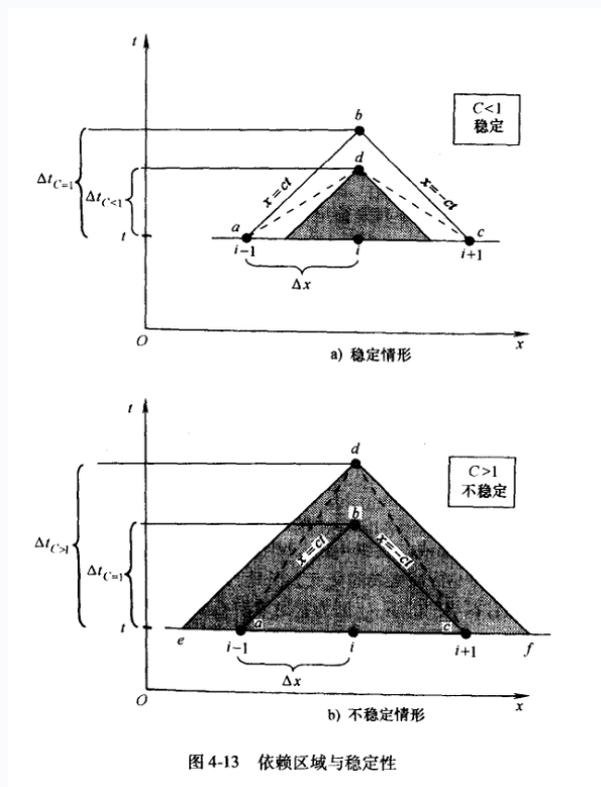


图 4-13 依赖区域与稳定性

依赖区域与稳定性

左图画出了这两族特征线，由 a, b, c 三点所围成的区域对应着 CFL 条件的上限，即柯朗数为 $C = 1$ 。首先 b 点为通过网格点 $i - 1$ 的右行特征线与通过网格点 $i + 1$ 的左行特征线的交点，其到网格点的距离为 $\Delta t = c\Delta x$ 因此，此时柯朗数为 1。

当 $C < 1$ 时， d 点到网格点的距离小于 Δt ，由于 d 点的信息是由网格点 $i + 1$ 和 $i - 1$ 的信息计算出来的，因此 d 点的数值解的依赖区域为图中三角形 adc 那么图中 d 点解析解的依赖区域是由通过 d 点的特征线确定，由图可以看出， d 点的数值解的依赖区域包含了解析解的依赖区域。

基于这种方法，我们来看 $C > 1$ 的情形，显然，在这种情况下，数值解的依赖区域并没有把解析解的依赖区域包括进去，从而导致解的不稳定。（非解析解的区域是不定的）

Summary

要保证稳定性，数值解的依赖区域必须全部包含解析解的依赖区域。



MacCormack

MacCormack 方法是Lax-Wendroff 方法的变种，但是应用简单。MacCormack 方法里密度用下式得到：

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} \Delta t$$

式中 $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av}$ 表示在 t 时刻和 $t + \Delta t$ 时刻之间的平均值，等价于采用中心差分，但是我们只是采用半步的推进，其他流场变量都有类似的表达式。MacCormack 方法不用计算二阶导数，也能达到二阶效果。

时间导数的平均值可由校正原理得到。

预估步

我们用向前差分得到空间导数

$$(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t \Delta t$$

这是对密度的预估值，只有一阶精度。

校正步

我们用向后差分进行校正可得

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{av} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right)_{i,j}^{t+\Delta t} \right]$$

如果我们在预估步使用向后差分，在校正步使用向前差分，也可以得到同样的精度。

 x 方向速度的详细推导 copy from textbook

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

先用向前差分代替右边的空间导数的

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^t = - \left(u_{i,j}^t \frac{u_{i+1,j}^t - u_{i,j}^t}{\Delta x} + v_{i,j}^t \frac{u_{i,j+1}^t - u_{i,j}^t}{\Delta y} + \frac{1}{\rho_{i,j}^t} \frac{p_{i+1,j}^t - p_{i,j}^t}{\Delta x} \right)$$

我们泰勒级数的前两项来取 u 的估计值

$$(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^t \Delta t$$

我们得到了一个粗略的 $t + \Delta t$ 时刻的 u 值

我们利用上一步预测的值（因为在 $t + \Delta t$ 时刻的信息是不知道的），用向后差分重新估计右边的空间导数

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^{t+\Delta t} = - \left[\bar{u}_{i,j}^{t+\Delta t} \frac{\bar{u}_{i,j}^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \bar{v}_{i,j}^{t+\Delta t} \frac{\bar{u}_{i,j}^{t+\Delta t} - \bar{u}_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{1}{\bar{\rho}_{i,j}^{t+\Delta t}} \frac{\bar{p}_{i,j}^{t+\Delta t} - \bar{p}_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right]$$

最后取一个算术平均值：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{av}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^{t+\Delta t} \right]$$

最终得到速度的校正值：

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\text{av}} \Delta t$$

 [MacCormack method - Wikipedia](#)

(PS: ~~我有点没看懂那个推导~~，在作业和GPT的帮助下终于理解了这个方法哈哈)

二维粘性流动：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} + J$$

MacCormack 方法可以使用空间推进，但是要求流动是超音速流动或高超音速，这是因为时间是单向流动的，也就是之后发生的事情不会影响到之前的事情，在双曲型方程和抛物型方程

都有所说明，因此我们也要求在使用空间推进求解时，下游的信息不应该影响到上游。

考虑如下简化形式

$$\frac{\partial F}{\partial x} = J - \frac{\partial G}{\partial y}$$

对于 F 其在网格点 $(i+1, j)$ 处的值可以从下式求出

$$F_j^{i+1} = F_j^i + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\text{av}} \Delta x$$

预测步

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^i = J_i - \frac{G_{j+1}^i - G_j^i}{\Delta y}$$

预估值

$$\bar{F}_j^{i+1} = F_j^i + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^i \Delta x$$

校正步

$$\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^{i+1} = \bar{J}_j^{i+1} - \frac{\bar{G}_j^{i+1} - \bar{G}_{j-1}^{i+1}}{\Delta y}$$

平均值

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\text{av}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^i + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \right)_j^{i+1} \right]$$

最后得到

$$F_j^{i+1} = F_j^i + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\text{av}} \Delta x$$



(了解)

松弛法是一种适用于求解椭圆型偏微分方程的有限差分法。考虑如下速度势的Laplace方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

考虑如下迭代式

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{2(\Delta y)^2 + 2(\Delta x)^2} \left[\frac{\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right]$$

其中右边四个量看成已知的 n 次迭代之，左边视作未知的第 $n+1$ 次迭代值。 n 和 $n+1$ 表示迭代次数，与时间或空间的推进步数无关。

当所有网格点处的 $|\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n|$ 变得都小于一个预定的值，就认为迭代收敛，迭代次数越多，精度越高。

通常运用主超松弛法可加快收敛速度，可将迭代式的结果看成 $\bar{\Phi}_{i,j}^{n+1}$ ，假设迭代过程是从左向右扫描，我们用上一次迭代得到的结果和得到的 $\bar{\Phi}_{i,j}^{n+1}$ 外推出 $\Phi_{i,j}^{n+1}$ 的值

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^n + \omega(\bar{\Phi}_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n)$$

其中 ω 称为松弛因子，如果 $\omega > 1$ ，上面的过程叫做逐次超松弛法，如果 $\omega < 1$ ，就叫做逐次低松弛法，当收敛表现为在某个值附近来回摆动，通常会用到低松弛法。



- 数值耗散：形如 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的项，扮演者耗散项的角色这些项很像NS方程中的粘性项，但是是由数值离散产生出来的，完全来源于数值过程，没有物理意义。
- 人工粘性：方程中 $(\alpha\Delta/2)(1-\nu)$ ，因为其作用很像物理粘性（耗散项前面的系数）。人工粘性和数值耗散都意味着数值解的耗散行为，不过行为本质上完全来源于数值过程的行为。
- 数值色散：形如 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 项，表现为波在传播过程中产生畸变，波前和波后出现振荡。

数值耗散是修正方程右端项偶数阶导数的直接结果，数值色散是奇数阶导数的直接作用结果。修正方程的右端项是截断误差，如果截断误差的主项是偶数阶导数，数值解主要变现为耗散行为；如果主项是奇数阶导数，则数值解主要变现出色散行为。

数值耗散的优缺点

- 优点：
 1. 稳定性：数值耗散可以通过抑制高频振荡并防止其增长和引起不稳定来帮助稳定模拟。在使用显式时间积分方案时，这一点尤其重要，因为数值稳定性是一个主要问题。
 2. 解决方案的平滑：在某些情况下，少量的数值耗散可以帮助产生更平滑的解决方案，减少虚假振荡，特别是在冲击波或不连续性周围。在某些情况下，这可以导致更物理准确的结果。
 3. 冲击捕捉：在某些高速可压缩流动模拟中，一定程度的数值耗散对于准确捕捉冲击波和不连续性是必不可少的。没有它，可能会发展出虚假振荡和非物理解方案。
- 缺点：

1. 精度损失：过多的数值耗散可能导致解决方案中的精度损失，因为它可能会抑制物理上相关的小尺度特征或梯度。这可能导致对底层物理的表示不够准确。
2. 人工粘性：数值耗散可以向模拟中引入人工粘性，这在实际流体中并不存在。这可能会影响流动的行为，特别是在粘性重要的情况下，如层流或具有显著边界层效应的流动。
3. 收敛速度变慢：在某些情况下，数值耗散可能会减慢模拟的收敛速度，因为它可能需要更小的时间步长或额外的迭代才能达到稳态解决方案。
4. 依赖于数值方案和网格分辨率：数值耗散的量取决于所使用的特定数值方案以及网格分辨率。这可能使得预测数值耗散对给定模拟的影响具有挑战性，并且可能需要广泛的实验和验证才能获得准确的结果。



ADI 算法（了解）

考虑如下非定常二维热传导方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

其有限差分形式：

$$\begin{aligned} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = & \alpha \frac{\frac{T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^n}{2} - 2 \left(\frac{T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j}^n}{2} \right) + \frac{T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^n}{2}}{(\Delta x)^2} \\ & + \alpha \frac{\frac{T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j+1}^n}{2} - 2 \left(\frac{T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j}^n}{2} \right) + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j-1}^n}{2}}{(\Delta y)^2} \end{aligned}$$

我们采用推进方法求解，第一步的时间步长 $\Delta t/2$ ，用中心差分代替空间导数，但是只对 x 的导数采用隐式处理：

$$\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\Delta t/2} = \alpha \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \alpha \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}$$

简化成三对角形式：

$$AT_{i-1,j}^{n+1/2} - BT_{i,j}^{n+1/2} + AT_{i+1,j}^{n+1/2} = K_j$$

其中

$$A = \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2}$$

$$B = 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$K_i = -T_{i,j}^n - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n)$$

对一个固定的 j ，对所有的 i 写出三对角形式的方程，联立形成一个方程组，利用追赶法得到 $T_{i,j}^{n+1/2}$ 的解 (j 固定)，然后对下一个固定的 $j+1$ 做同样的操作，于是我们就得到了中间时刻所有网格点 (i, j) 的 $T_{i,j}^{n+1/2}$

ADI 的第二步就是利用 $t + \Delta t/2$ 时刻的已知值求解 $t + \Delta t$ 适合的解，我们仍用中心差分替代空间导数，但是对 y 的导数做隐式处理：

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \alpha \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \alpha \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}$$

简化成三对角形式：

$$CT_{i,j-1}^{n+1} - DT_{i,j}^{n+1} + AT_{i,j+1}^{n+1} = L_j$$

其中

$$C = \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2}$$

$$D = 1 + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$L_j = -T_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2} (T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2})$$

注意此时我们已经在第一步中求出了各网格点处的 $T^{n+1/2}$ 。按同样的处理方法可以得到 $t + \Delta t$ 所有网格点 (i, j) 的 $T_{i,j}^{n+1}$ 。



显式 NS 方程的近似稳定解：

$$\Delta t \leq \frac{1}{|u|/\Delta x + |v|/\Delta y + a\sqrt{1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2}}$$

在不可压缩流动中声速是无限的，这种现象进一步被观察到，当将可压缩流动的 CFD（计算流体力学）求解技术应用于马赫数逐渐减小至零的流场时，需要越来越多的时间步长才能收敛



压力修正法的基本原理

1. 迭代开始时，先给定压力的初始近似 p^*
2. 用 p^* 的值从动量方程中求解 u, v, w 。因为这些速度都与 p^* 有关，所以用 u^*, v^*, w^* 表示它们
3. 将根据 u^*, v^*, w^* 带入到连续性方程，它们不一定满足连续性方程，用连续性方程构造压力的修正量 p' ，修正后的压力：

$$p = p^* + p'$$

相应的速度修正量：

$$\begin{aligned}u &= u^* + u' \\v &= v^* + v' \\w &= w^* + w'\end{aligned}$$

4. 用修正后的压力作为新的 p^* ，回到步骤 2，重复过程直到速度场满足连续性方程

SIMPLE 算法

1. 给出所有“压力”网格点上的 $(p^*)^n$ ，在相应的“速度”网格点上任意给定 $(\rho u^*)^n, (\rho v^*)^n$
2. 在所有内部网格点上解出 $(\rho u^*)^{n+1}$ 和 $(\rho v^*)^{n+1}$
3. 利用 $(\rho u^*)^{n+1}$ 和 $(\rho v^*)^{n+1}$ 求出 p'
4. 计算 $p^{n+1} = (p^*)^n + p'$
5. 重新求解动量方程更新速度



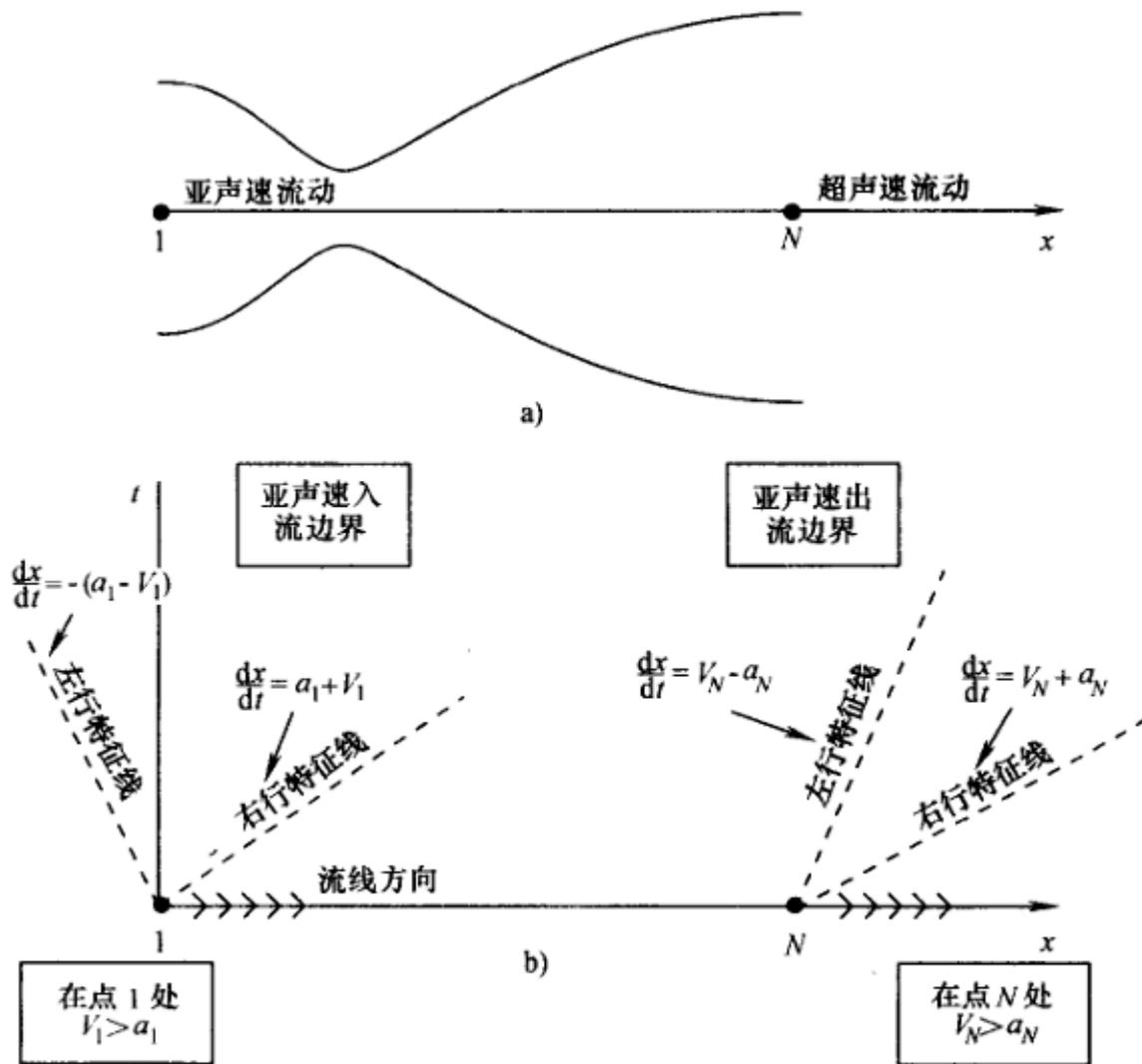


图 7-6 亚声速入流和超声速出流的边界条件

特征线理论

非定常无粘流动的控制方程是双曲型的，因此对于喷管流动，在 x, t 平面上存在两条特征线，特征线分为左行特征线和右行特征线，分别代表向上游传播和下游传播的无限弱的马赫波（气流状态参数不变），他们传播的速度都是声速 a ，对于入口流动，由于流速为亚声速 ($V < a$)，因此左行特征线向左传播 ($V - a < 0$)，右行特征线向右传播 ($V + a > 0$) 对于出口流场，可得两条特征线都是向右传播的。

特征线理论给出：在边界上，如果有一条特征线进入流动区域之内，就必须在边界上给定一个流动参数，如果有一条特征线离开流动区域，就必须允许某个流动参数在边界上随时间变化。由于 1 点处还有流线流入（其可视为一条特征线），因此，在亚声速入流边界上，必须给定两个独立的流动参数（流线+右行特征线），同时允许第三个流动参数变化（左行特征线）；在超声速出流边界上，无需给定流场参数，其皆为变化的。

对于入流边界，我们一般给定密度和温度，用插值的方法计算速度：

$$V_1 = 2V_2 - V_3$$

$$\begin{cases} \rho_1 = 1 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

对于出口处，我们采用线性外插：

$$V_N = 2V_{N-1} - V_{N-2}$$

$$\rho_N = 2\rho_{N-1} - \rho_{N-2}$$

$$T_N = 2T_{N-1} - T_{N-2}$$



不可压缩流动的边界条件：

- 上边界

$$u = u_e$$

$$v = 0$$

- 下边界：

$$u = v = 0$$

- 入流边界：

$$p' = 0$$

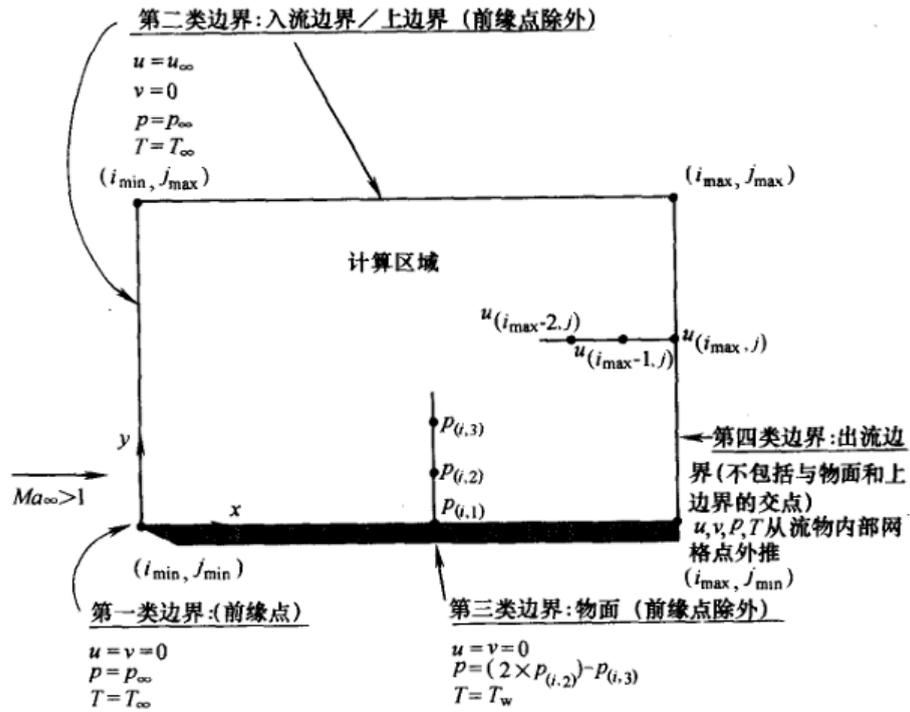
$$v = 0$$

- 出流边界：

$$p' = 0$$



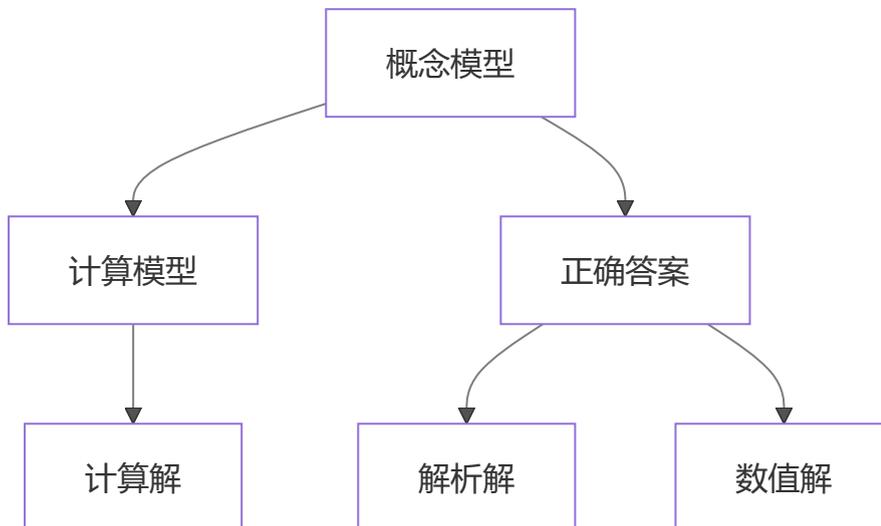
超声速平板流动的边界条件：



- 第一类边界条件：在前缘，速度满足无滑移，温度和压力取自由来流值
- 第二类边界条件：速度 x 方向分量 u 、温度、压力取相应自由来流值，速度 y 方向分量为零
- 第三类边界条件：平板表面，速度满足无滑移条件；温度与壁面温度相同，采用外推法计算压力
- 第四类边界条件：采用外推法得到边界条件。



- 验证 (Verification) 理论:



- 确认 (Validation) 理论

