

# Introduction For FEM

## 有限元方法

工程问题一般都能化成求解如下方程：

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= f(x, y) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x, y) &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega\end{aligned}$$

这个方程的解一般是函数  $u(x, y)$ ，“知道”一个函数意味着我们知道其在无限点  $(x, y)$  对应的值，但并不一定总是能给出其所对应的解析表达式，此时会采用数值解。但是，计算机一般只能存储有限个数值解，计算过程也只是有限的。因此，我们不能真正求解一个 PDE，我们所能做的其实只是近似这个解。

所以这就带来了两个问题：

- 如何在有限数据和计算的情况下近似这个解
- 如何在不求出解析解的情况下近似PDE的解

常用的近似函数有：

- 傅里叶级数 (Fourier series)
- 全局多项式 (global polynomial)
- 在定义域划分的网格上定义的局部多项式

傅里叶级数方法在  $u$  是全局光滑近似良好，而第二种办法一般只适用于部分邻域。有限元方法用的就是第三种方法。

斯通-魏尔施特拉斯逼近定理(Stone-Weierstrass theorem) 给出：闭区间上的连续函数可用多项式级数一致逼近。

PDEs 的解有如下特点：

- 在定义域上的大部分地方都是光滑的
- 在定义域上的小部分地方变化非常迅速
- 边界奇异点
- 也许有褶皱 (May have kinks)

有限元方法 (FEM) 或有限元分析 (FEA) 基于用简单的网格构建复杂对象或者将复杂对象划分为易于分析的网格。其过程可以简述为：将物理域 (定义域) 划分称若干个简单的元素，找到每个元素对应的方程，最后将这些元素方程整合起来，得到：

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

PropertyBehavior      Action

有限元方法步骤可以总结如下：

- 离散并选择元素类型 (Discretize and select the element type)
- 选定位移函数 (Select a displacement function)
- 定义物理关系 (应力-应变、位移-应变)  $\varepsilon = \nabla u$   $\sigma = D\varepsilon$  (Define the strain/displacement and stress/strain relationships)
- 获取元素的刚度矩阵和其对应的等式  $k_e u_e = f_e$  (Derive the element stiffness matrix and equations)
- 组合元素方程以获得全局方程，并引入边界条件 (Assemble the element equations to obtain the global equations and introduce boundary conditions)
- 求解自由度 (Solve for the unknown degrees of freedom)
- 求解元素应力应变 (Solve for the element strains and stresses)
- 后处理 (Interpret the results)

获取元素的刚度矩阵和等式有如下方法

- 直接法：我们可以直接计算这个等式，但是这种方法比较适用于 1 维元素
- 能量法：比如说势能最小原理、卡氏定理（适用于弹性材料）虚功原理（适用于各种材料）
- 加权残差法：如伽辽金方法，适用于各种微分方程

有限元方法的误差(error)有

- 离散误差(Discretization error)；比如说定义域的结构被简化从而会产生一定的误差。
- 模型误差(Modeling error)；比如说我们采用多项式去逼近。
- 数值误差(Numerical error)；比如说我们采用比较简单的积分方法会产生一定的误差

# Stiffness Method

## 有限元方法

以下三种方法用于计算机编程

### Matrix Partitioning

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{fix} \\ d? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F? \\ F_{fix} \end{Bmatrix}$$

用  $[ ]_{fix}$  表示已知位移或应力，用  $[ ]?$  表示未知量，因此求解的步骤为：

1. 求解：  $K_{22}d? = F_{fix} - K_{21}d_{fix}$
2. 求解：  $F? = K_{11}d_{fix} + K_{12}d?$

#### Note

如果此时已知量为 0（固定约束），我们可以删除对应行列的元素，比如说  $d_{11}$  位移为零，那么我们就可以删除第一行和第一列的元素，此时求解步骤为

$$\begin{aligned} K_{22}d? &= F_{fix} \\ \implies F? &= K_{12}d? \end{aligned}$$

这样方便求解

- Advantages:
  - 待求的方程比较少
  - 满足特定约束
- Disadvantages:
  - 需要改变方程数量
  - 不易编程

### Row Substitution

假定约束条件给出  $d_i = \delta$ ，则我们可以直接将其直接带入 Global Equation：

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i_1} & K_{i_2} & \dots & K_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ F_i \\ \dots \end{Bmatrix}$$

同时保留位移信息

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}$$

## Penalty Method

我们也可以将约束转换成一个比较大的惩罚项：

$$\begin{bmatrix} K_{i_1} & K_{i_2} & \cdots & K_{ii} + BIG & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i + BIG \times \delta \end{Bmatrix}$$

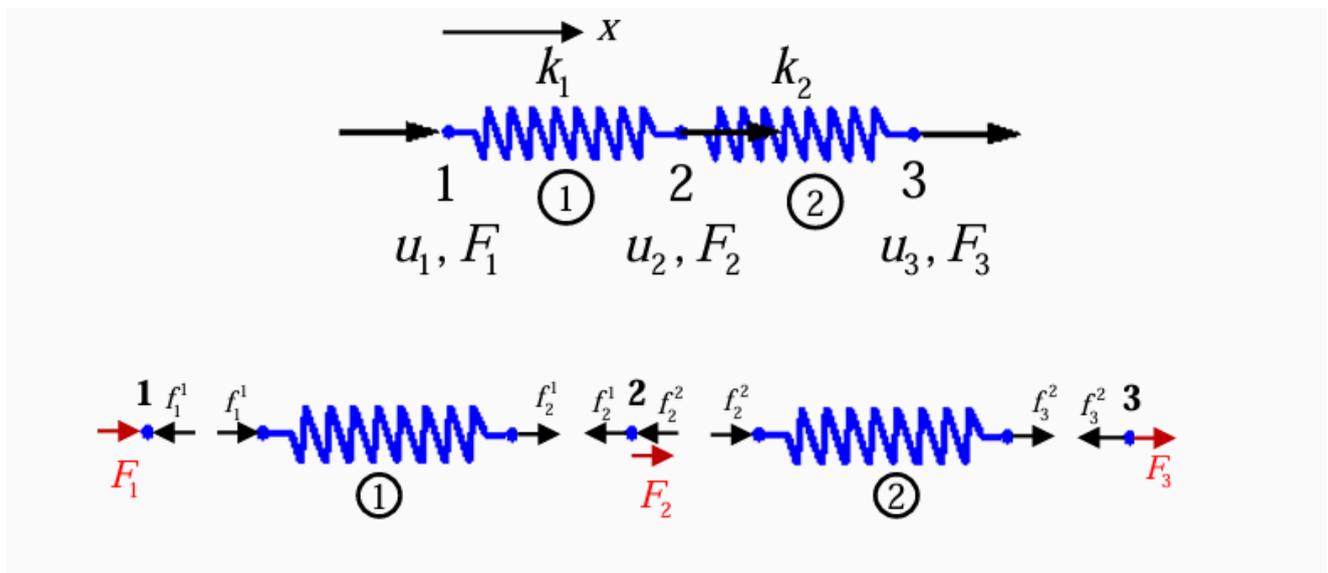
展开后：

$$\begin{aligned} \text{small} + (BIG)d_i &= \text{small} + BIG \times \delta \\ \implies d_i &= \delta \end{aligned}$$

一般取  $BIG = 10^{15}(K_{ii})_{rep}$



考虑两个弹簧的简单串联问题：



给出两个弹簧满足的平衡方程

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_1^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^2 \\ f_2^3 \end{Bmatrix}$$

考虑节点处的平衡条件可得装配后全局刚度矩阵：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

 Note

如果通过组合元素刚度来创建全局刚度矩阵,  $k_{22}$  是由作用于节点 2 的直接刚度之和给出, 这是兼容性条件所要求的。

$k_{ij}$  一般是负的 (反作用力) 或者是零 (无作用效果)

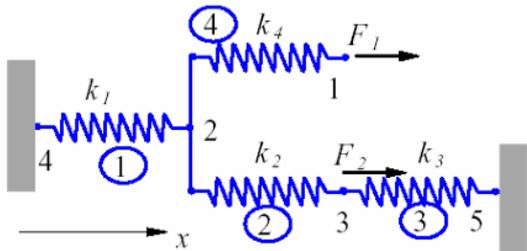
 Tip

- 位置  $ii$  中的项由所有在节点  $i$  处汇合的元素的直接刚度总和组成
- 位置  $ij$  项由连接节点  $i$  和  $j$  的所有元素与节点  $i$  和  $j$  有关的间接刚度综合构成
- 反作用力项添加负值
- 为不发生相互作用的节点组合添加一个零

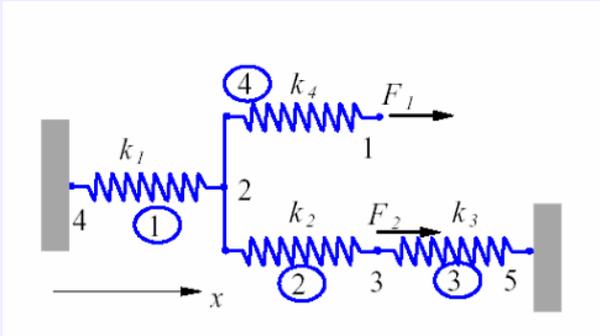


$N$  个自由度会产生一个  $N \times N$  的刚度矩阵 (方阵)

- (全局) 刚度矩阵的  $i$  行与位移的积等于作用在系统第  $i$  个自由度的外力
- 刚度矩阵的第  $j$  列表示使  $j$  节点产生单位位移, 其余节点不变所需要的力。
- 一般而言刚度矩阵为对称矩阵, 对角线元素为正, 矩阵为奇异矩阵



## 举个



考虑如图系统，对于节点 (1) 直接刚度为  $k_4$ ，节点 (1) 和节点 (2) 之间的连接弹簧刚度为  $k_4$  其作用效果为反作用力；对于节点 (2)，直接相连的弹簧有  $k_1, k_2, k_4$ ，节点 (2) 与节点 (4) 之间的连接弹簧刚度为  $k_1$ ，节点 (2) 和节点 (3) 之间的连接刚度弹簧节点为  $k_2$ ；对于节点 (3)，直接相连的弹簧有  $k_2, k_3$ ，除了节点 (2) 外还与节点 (5) 相连；对于节点 (4)，直接刚度为  $k_1$ ，与节点 (2) 相连；对于节点 (5)，直接刚度为  $k_3$ ，与节点 (3) 相连，所以全局刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_4 + k_2 + k_1 & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$



还有一种求法，其思想与上面的两个弹簧装配问题类似，对于弹簧  $k_l$ ，其两端节点的位移分别为  $u_i, u_j$  ( $i, j, l$  不一定要相等)，则此时局部刚度矩阵

$$\mathbf{k}_l = \begin{bmatrix} k_l & -k_l \\ -k_l & k_l \end{bmatrix}$$

将其叠加就可得到全局装配矩阵

在这个例子中，对于弹簧  $k_1$ ，其作用两端节点位移为  $u_2, u_4$ ；对于弹簧  $k_2$ ，其作用两端节点位移为  $u_2, u_3$ ，对于弹簧  $k_3$ ，其作用两端节点位移为  $u_3, u_5$ ；对于弹簧  $k_4$ ，其作用两端节点位移为  $u_1, u_2$ ，将其叠加可得全局刚度矩阵。

我们还能利用 Lagrange 方程或者能量最小原理得到上述方程。



由于刚度矩阵是一个奇异矩阵，也就是意味着其不可逆， $\{u\}$  没有解。因此此时需要引入边界条件，从而将刚度矩阵变为一个可逆矩阵。

**No BC:**

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \det[K] = 0$$

**Enforce BC:**  
 $u_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \det[K] \neq 0$$

一个简单的例子就是，假定  $u_1$  为固定约束时，我们可以删去第一行和第一列的元素，剩下的元素构成一个刚度矩阵，如上图，变换后的刚度矩阵为

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

此时行列式  $\det K = k_1 k_2$  变成一个可逆元素，系统存在唯一解。

# Truss Problem

## 有限元方法

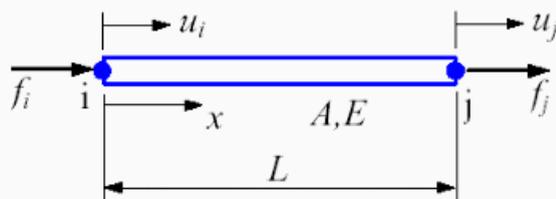
我们先推导局部(Local)坐标中杆单元方程

### Features of a Bar

- 只受轴向力 (tension or compressin)
- 沿轴向变形
- 不受剪力和弯矩

## Bar Element

Consider a uniform bar in local coordinate  $x$ :



$L$	length
$A$	cross-sectional area
$E$	elastic modulus
$u = u(x)$	displacement
$\varepsilon = \varepsilon(x)$	strain
$\sigma = \sigma(x)$	stress

7

位移函数:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{L}x$$

$$\Rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j = [N_i \quad N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{where } N_i = 1 - \frac{x}{L} \quad N_j = \frac{x}{L}$$

$N_i, N_j$  称为形函数, 表示在定义域上元素假定位移函数的形状

应力和应变:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{u_j - u_i}{L}$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u_j - u_i}{L}$$

刚度矩阵:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



用能量法获取刚度矩阵:

- 位移

$$u(x) = [N_i \quad N_j] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{u}\}$$

- 应变

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d[\mathbf{N}]}{dx} \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\}$$

- 应力

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = [\mathbf{D}][\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} \quad [\mathbf{D}] = [E]$$

应变矩阵  $[\mathbf{B}]$  计算了节点位移而产生的应变, 材料性质矩阵  $[\mathbf{D}]$  一般是一个对称矩阵。

杆的势能

$$\Pi_p(u) = U(u) + \Omega(u)$$

其中  $U$  为应变能, 在杆的问题中为:

$$\begin{aligned} U(u) &= \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_x \varepsilon_x dV \\ &= \frac{A}{2} \int_0^L \sigma_x^T \varepsilon_x dx = \frac{A}{2} \int_0^L \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} dx \\ &= \frac{AL}{2} \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} \end{aligned}$$

$\Omega$  是功,

$$\begin{aligned}
\Omega &= -(f_i u_i + f_j u_j) - \underbrace{\iint_{S_1} u_s^T T_x dS}_{\text{表面载荷作用}} \\
&= -\{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{P}\} - \iint_{S_1} \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{N}_s]^T T_x dS \\
&= -\{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}\} \\
\{\mathbf{f}\} &= \{\mathbf{P}\} + \iint_{S_1} [\mathbf{N}_s]^T T_x dS \\
&\quad \text{等效节点力}
\end{aligned}$$

因此势能可写作

$$\Pi_p = \frac{AL}{2} \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}\}$$

由最小势能原理可得

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \{\mathbf{u}\}} \implies AL[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]^T [\mathbf{B}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \triangleq [\mathbf{k}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\}$$



将均布载荷转换成节点上的集中力。

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{f}_s\} &= \iint_{S_1} [\mathbf{N}_s]^T T_x dS \\
\text{Here } [\mathbf{N}_s] &= [1 - x/L \quad x/L], \quad T_x = q, \quad dS = dx \\
\implies \{\mathbf{f}_s\} &= \iint_{S_1} [\mathbf{N}_s]^T T_x dS = q \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

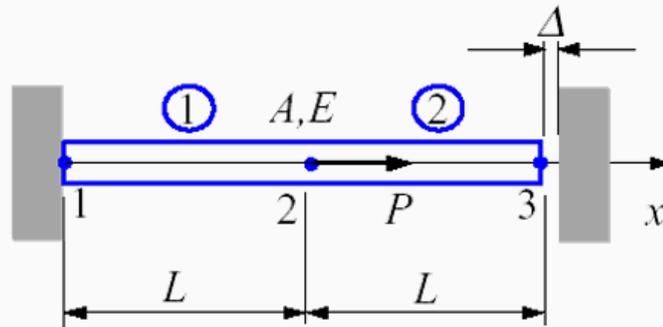
这是为了在运用  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$  的时候能确定节点上对应的集中力

在比如说，假定杆上的载荷服从线性关系，即  $\hat{T}_x = C\hat{x}$ ，那么作用在前后节点上的集中力为

$$\{\mathbf{f}_s\} = \iint_{S_1} [\mathbf{N}_s]^T T_x dS = q \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - x/L \\ x/L \end{Bmatrix} Cx dx = \begin{Bmatrix} CL^2/6 \\ CL^2/3 \end{Bmatrix}$$

## Example

### Example 2



**Problem:** Determine the support reaction forces at the two ends of the bar shown above, given the following

$$P = 6.0 \times 10^4 \text{ N}, \quad E = 2.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$A = 250 \text{ mm}^2, \quad L = 150 \text{ mm}, \quad \Delta = 1.2 \text{ mm}$$

我们先考虑杆会不会接触到墙面，当右端没有墙时，3点位移为

$$\Delta_0 = \frac{PL}{EA} = 1.8 \text{ mm} > 1.2 \text{ mm}$$

所以杆会接触到墙壁。

Global 刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以待定方程为:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

边界条件:

$$u_1 = 0, \quad u_3 = \Delta, \quad F_2 = P$$

可以解得

$$u_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{PL}{EA} + \Delta \right) = 1.5\text{mm}$$



## 收敛性

- 位移在每个节点 (node) 上都是准确的, 但是在节点之间不一定
- 每个元素(elements)所受的应力为常量, 但是元素之间的应力不是连续的
  - 解的准确性会随着元素数量的增加而提高

在FEA 中, 我们采用多项式来描述一个元素的位移。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= a_0 + a_1x + b_1y + c_1z + \dots \\ &= N_1(x, y, z)u_1 + N_2(x, y, z)u_2 + \dots \\ &= \sum_i N_i u_i \end{aligned}$$

形函数的性质:

1. 在节点  $i$ ,  $N_i = 1$ , 在其他节点  $N_i = 0$
2. 允许刚体移动:  $\sum N_i = 1$

## 位移函数的完整性和相容性确保 FEA 的收敛性

- 完备性 (Complete): allow for a rigid-body displacement and a constant strain within the element
- 相容性 (Compatible): continuity between adjacent elements and within the element
  - $C^m$  描述了多项式的连续程度, 比如说  $C^0$  表述位移式连续的,  $C^1$  表述位移和其一阶导数是连续的。

## Selection of displacement functions

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & x & \vdots & y \\
 & & & & x^2 & xy & y^2 \\
 & & x^3 & x^2y & \vdots & xy^2 & y^3 \\
 & x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 & \\
 x^5 & x^4y & x^3y^2 & \vdots & x^2y^3 & xy^4 & y^5
 \end{array}$$



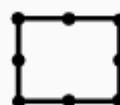
$$u = a + bx + cy$$



$$u = a + bx + cy + dxy$$



$$u = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$$



$$u = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy + gx^2y + hxy^2$$



我们要将局部(Local)元素和全局(Global)元素联系起来

取元素与水平方向的夹角为  $\theta$ ，即定义

$$C = \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L} \quad S = \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L}$$

取  $u'$  表示局部元素， $u$  为全局元素，则坐标系的变换满足：

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

称  $\mathbf{T}$  为变换矩阵，其满足  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$

节点上的力也遵循变换规则

$$\mathbf{f}' = \mathbf{T}\mathbf{f}$$

对应刚度矩阵

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

展开为

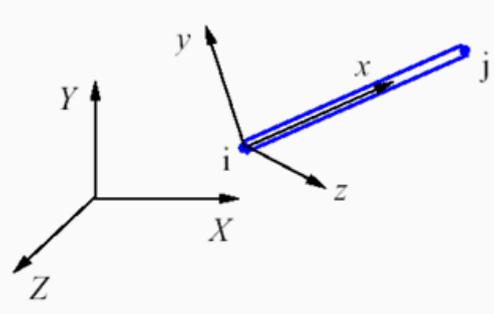
$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$

应力:

$$\sigma_x = \frac{E}{L} [-C \quad -S \quad C \quad S] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

注：每一根杆都有自己的旋转矩阵

### The case of 3D



$$l = \frac{X_j - X_i}{L} = \cos \theta_x$$

$$m = \frac{Y_j - Y_i}{L} = \cos \theta_y$$

$$n = \frac{Z_j - Z_i}{L} = \cos \theta_z$$

$\theta_x$  : angle between  $x$  and  $X$   
 $\theta_y$  : angle between  $x$  and  $Y$   
 $\theta_z$  : angle between  $x$  and  $Z$

local	Global
$x, y, z$ $u_i', v_i', w_i'$ 1 dof at node	$X, Y, Z$ $u_i, v_i, w_i$ 3 dof's at node

如果全局元素是一个三维问题，则取

$$l = \frac{X_j - X_i}{L} = \cos \theta_x$$

$$m = \frac{Y_j - Y_i}{L} = \cos \theta_y$$

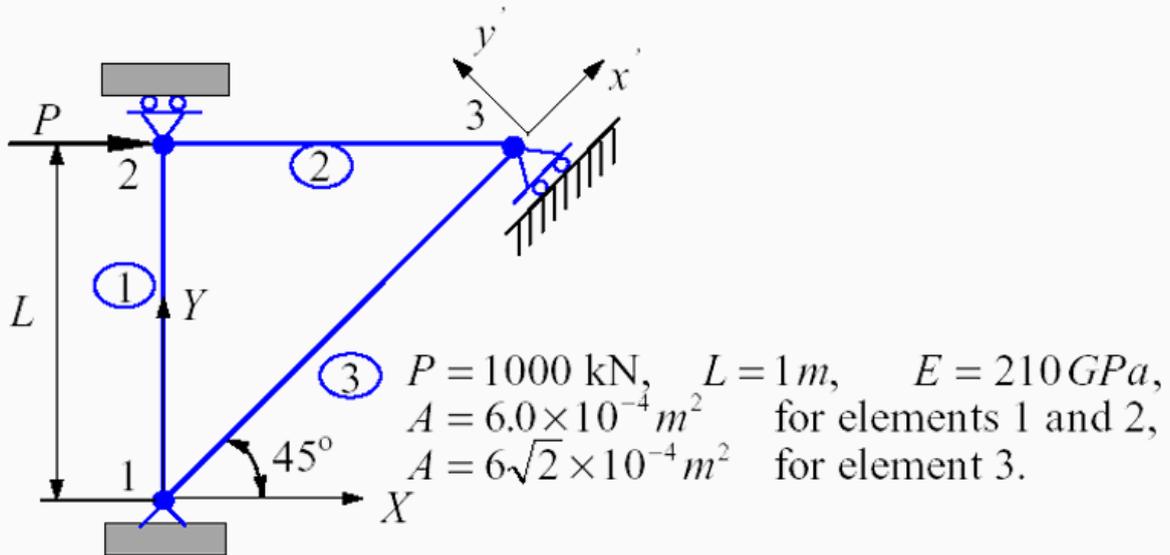
$$n = \frac{Z_j - Z_i}{L} = \cos \theta_z$$

则刚度矩阵为

$$[\mathbf{k}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

 Example

## Example 2 (Multipoint Constraint)



51

对于杆 1,  $\theta = 90^\circ$ ,  $C = 0$ ,  $S = 1$ , 对应的 Global 刚度矩阵:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于杆 2  $\theta = 0^\circ$ ,  $C = 1$ ,  $S = 0$ , 对应的 Global 刚度矩阵:

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于杆 3,  $\theta = 45^\circ$ ,  $C = \sqrt{2}/2$ ,  $S = \sqrt{2}/2$  对应的 Global 刚度矩阵

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

装配后的矩阵

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & -1 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix}$$

引入边界条件，此时有两个特殊的边界条件： $v'_3 = 0, F_{3x'} = 0$ ，对应几何关系

$$\begin{aligned} u_3 - v_3 &= 0 \\ F_{3X} - F_{3Y} &= 0 \end{aligned}$$

其余边界条件： $u_1 = v_1 = v_2 = 0, F_{2X} = P$ ，对应待定方程：

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ F_{3X} \\ F_{3X} \end{Bmatrix}$$

带入求解即可

# FEM for Beam

有限元方法

## Mechanics of Beam

### Sign Convention

The diagram shows two horizontal beams. The top beam is labeled 'In beam theory' and the bottom beam is labeled 'In FEA'. A coordinate system is shown on the left with axis 1 pointing right and axis 2 pointing up. In the 'In beam theory' diagram, a counter-clockwise moment  $M$  is labeled with a '+' sign, and an upward shear force  $F$  is labeled with a '+' sign. In the 'In FEA' diagram, a counter-clockwise moment  $M$  is labeled with a '+' sign, and an upward shear force  $F$  is labeled with a '+' sign. A legend on the right states:  $M$ : moment,  $F$ : shear.

**Forces: positive when along positive direction of axis**  
**Moments: positive when counterclockwise**

4

与材料力学中不同，在有限元方法中，我们定义力沿坐标轴正方向为正，力矩逆时针为正

- 挠曲线:  $v(x, t)$
- 转角:  $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$
- 弯矩:  $M(x, t) = E(x)I(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
- 剪力:  $P(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x}$
- 分布力:  $f(x, t) = \frac{\partial P}{\partial x}$

对于一个梁单元，其有四个自由度（两端挠度和转角）

挠度

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

引入边界条件:

$$v(0) = v_i, v(L) = v_j$$

$$\frac{dv}{dx}(x=0) = \theta_i, \frac{dv}{dx}(x=L) = \theta_j$$

解得：

$$a_0 = v_i$$

$$a_1 = \theta_i$$

$$a_2 = -\frac{3}{L^2}(v_i - v_j) - \frac{1}{L}(2\theta_i + \theta_j)$$

$$a_3 = \frac{2}{L}(v_i - v_j) + \frac{1}{L^2}(\theta_i + \theta_j)$$

型函数

$$v = N_1 v_i + N_2 \theta_i + N_3 v_j + N_4 \theta_j$$

$$N_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

### Tip

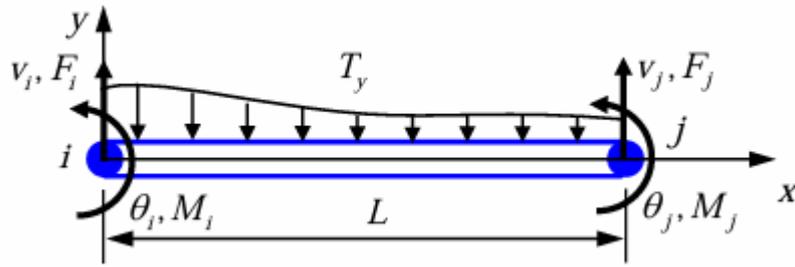
注意前面所讲，FEM 给出的解在节点上是准确的，但是节点和节点之间不一定是准确的，对于受均布载荷的梁方程，根据常微分理论对应位移函数应该是一个四次多项式，型函数给出的位移解最多为三次多项式。

待定方程

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$



能量法求解平衡方程



对挠度取二阶导数

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (\mathbf{N}\mathbf{u}) = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{N} = [N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4''] \\ &= \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \end{aligned}$$

应力应变:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \sigma_x &= E\varepsilon_x = -y E \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned}$$

应变能:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_x \iint_A \sigma_x^T \varepsilon_x dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_x \iint_A y^2 \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T E \mathbf{B}\mathbf{u} dA dx = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \int_0^L \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \mathbf{u} \end{aligned}$$

外力施加的势能

$$\Omega = -\mathbf{u}^T \mathbf{p} - \iint_S \mathbf{u}^T \mathbf{N}_s^T T_y dS = -\mathbf{u}^T \mathbf{p} - \mathbf{u}^T \int_0^L \mathbf{N}_s^T b T_y dx$$

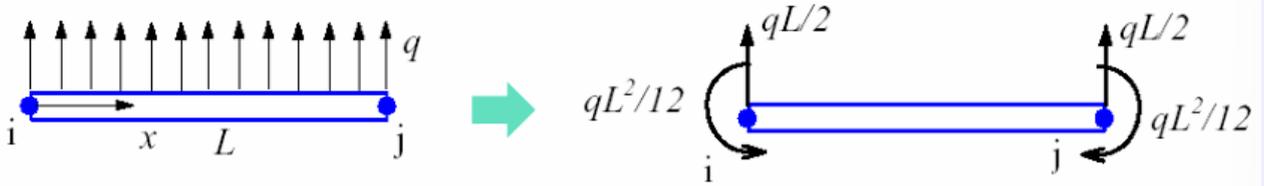
最小势能原理给出

$$\begin{aligned} \frac{\delta(U + \Omega)}{\delta \mathbf{u}^T} &= 0 \\ \implies \left( \int_0^L \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \right) \mathbf{u} &= \mathbf{p} + \int_0^L \mathbf{N}_s^T b T_y dx \end{aligned}$$

一般取  $bT_y$  为作用在梁上的载荷或力

### Example

将一个均布载荷转换成了作用在节点上的力和弯矩:



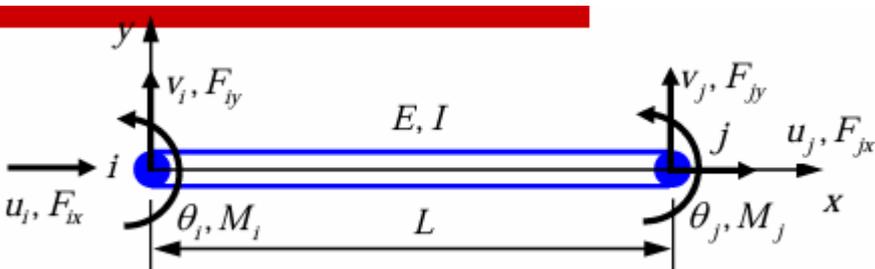
$$\int_0^L \mathbf{N}_s^T b T_y dx = \int_0^L \mathbf{N}_s^T q dx = q \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

### Example



对于作用在梁上一点的力，我们可以采用 [Dirac 函数](#) 处理。对于上述情况，在梁上  $x = \frac{L}{2}$  处作用力  $F = P$ ，取  $\delta$  函数  $\delta\left(\frac{L}{2}\right)$ ，则

$$\int_0^L \mathbf{N}_s^T P \delta\left(\frac{L}{2}\right) dx = P \int_0^L \delta\left(\frac{L}{2}\right) \begin{Bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{Bmatrix}$$



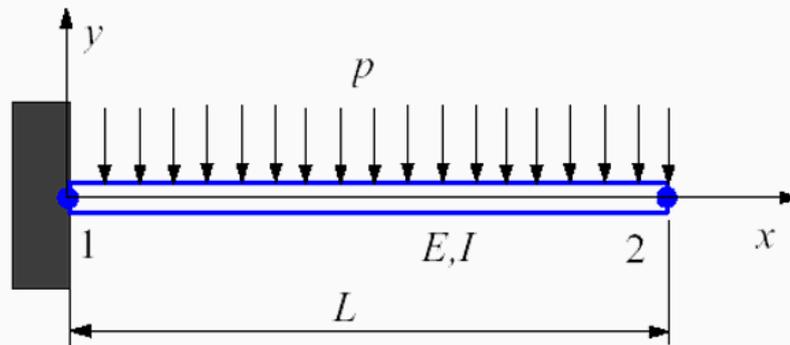
如果梁上作用横向力，则引入轴向的自由度（也就是在上述梁分析方法的基础上增加杆的分析），此时自由度为 6，对应刚度矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_i \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix}$$

### Tip

如果梁的某一端为弹性支撑（弹簧），其自由度为 4（梁的自由度）+ 1（弹簧的自由度）= 5，我们依旧可以装配法装配我们的刚度矩阵

## Example 2



Given: A cantilever beam with distributed lateral load  $p$  as shown above

Find: The deflection and rotation at the right end, the reaction force and moment at the left end

27

先将均布载荷转换成作用在节点上的力和力矩。取  $F_{2y} = -f, M_2 = m, (f = \frac{pL}{2}, m = \frac{pL^2}{12})$ ，刚度矩阵方程

$$\begin{aligned} \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ -f \\ m \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -f \\ m \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\frac{pL^4}{8EI} \\ -\frac{pL^3}{6EI} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

如果要求取作用在作用在 1 处的反作用力，先求取  $F_{1y}, M_1$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{5pL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

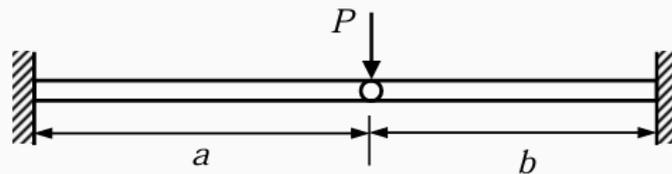
但注意此时求出来的是在节点 1 总的作用力，要扣除均布载荷的作用效果

$$\begin{Bmatrix} F'_{1y} \\ M_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{5pL^2}{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{pL}{2} \\ -\frac{pL^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pL \\ \frac{pL^2}{2} \end{Bmatrix}$$



## Example 4

Beam with internal hinge: **causes a discontinuity in the slope at the hinge**



Find: Determine the deflection and rotation at node 2 and the element forces for the uniform beam with an internal hinge at node 2 shown above. Let  $EI$  be a constant

36

考虑带有铰链的梁，铰链使得梁在铰接处的斜率不连续。因此，我们将其拆分成两个部分，将铰接点归入某一部分处理，构造一个新的刚度矩阵，而对于另一部分，由于不包含铰接点，所以视作正常的梁问题

先考虑右端的梁，对于铰接处，其满足  $\theta_j \neq 0, M_j = 0$ ，由于作用在节点的弯矩为零，做如下分块矩阵

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ \hline 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j = 0 \end{Bmatrix}$$

简写成如下形式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

可以解得

$$\begin{aligned} d_2 &= K_{22}^{-1}(f_2 - K_{21}d_1) \\ (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})d_1 &= f_1 \end{aligned}$$

有第二个式子可以推出

$$\frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 \\ L & L^2 & -L \\ -1 & -L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{iy} \\ M_i \\ F_{jy} \end{Bmatrix}$$

扩展成刚度矩阵（这是为了后面能够装配全局刚度矩阵，但是要保持  $M_j = 0$ ）

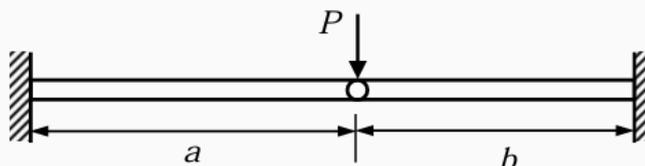
$$\frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{iy} \\ M_i \\ F_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix}$$

如果我们将铰接点归入左端处理的话，则上两个方程改为：

$$\begin{aligned} \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & L \\ -1 & 1 & -L \\ L & -L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_{iy} \\ F_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} \\ \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_{iy} \\ F_i \\ F_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

## Example 4

Beam with internal hinge: causes a discontinuity in the slope at the hinge



Find: Determine the deflection and rotation at node 2 and the element forces for the uniform beam with an internal hinge at node 2 shown above. Let  $EI$  be a constant

36

我们将铰链归入右端，则可以写出

$$\mathbf{k}_1 = \frac{3EI}{a^3} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ a & a^2 & -a & 0 \\ -1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

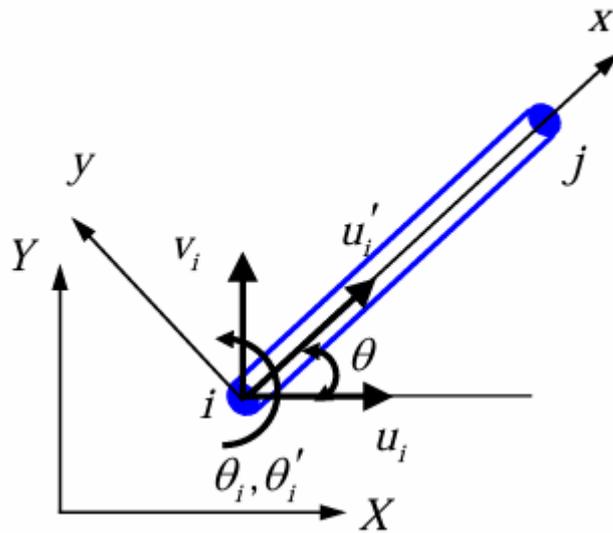
$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix}$$

装备后的刚度矩阵方程

$$EI \begin{bmatrix} \frac{3}{a^3} & \frac{3}{a^2} & -\frac{3}{a^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{a^2} & \frac{3}{a} & -\frac{3}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^3} & -\frac{3}{a^2} & \frac{3}{a^3} + \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} & \frac{12}{b^3} & \frac{6}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{b^2} & \frac{4}{b} & -\frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{b^3} & -\frac{6}{b^2} & \frac{12}{b^3} & -\frac{6}{b^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} & -\frac{6}{b^2} & \frac{4}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

引入边界条件，接触

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a^3 b^3 P / [3(b^3 + a^3)EI] \\ a^3 b^2 P / [2(b^3 + a^3)EI] \end{Bmatrix}$$



与杆类似，梁的二维变换满足：

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u}$$

同样的我们有：  $\mathbf{f}' = \mathbf{T}\mathbf{f}$

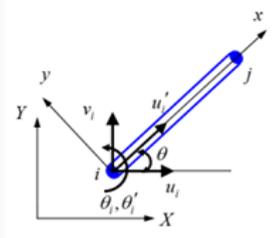
刚度矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta'_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \theta'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F'_{ix} \\ F'_{iy} \\ M'_i \\ F'_{jx} \\ F'_{jy} \\ M'_j \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{k}' \mathbf{u}' = \mathbf{f}'$$

可得刚度变换矩阵:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$$

## 2D Beam



$$\frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S \\ & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & \frac{6I}{L} C & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2\right) & \frac{6I}{L} C \\ & & 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 2I \\ & & & AC^2 + \frac{12I}{L^2} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S \\ & & & & AS^2 + \frac{12I}{L^2} C^2 & -\frac{6I}{L} C \\ & & & & & 4I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_i \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ M_j \end{Bmatrix}$$

Symmetry

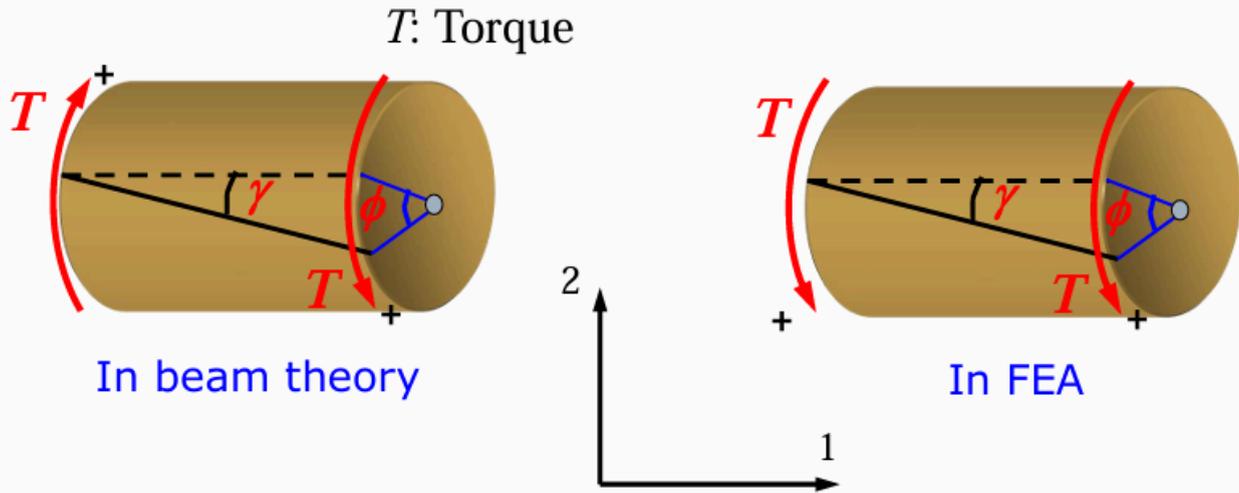
46

三维情况:

$$\mathbf{u}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{ix} \quad \theta_{iy} \quad \theta_{iz}]^T$$

三维情况需要考虑扭转的作用; 同样的, 我们定义根据右手法则指向正方向为正。

# Sign Convention



Torque: positive when along positive direction of axis according to the right-hand rule

扭转对应的刚度矩阵:

$$\frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $G$  为剪切模量,  $J$  为极惯性矩

## 3D Beam Element – Local Coordinates

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz}
 \end{Bmatrix}$$

or  $\mathbf{k}'\mathbf{u}'=\mathbf{f}'$



## 2D Problems

### 有限元方法

平面应力问题

应变-应力关系:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

其中  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

应力-应变关系:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

对应平面应变问题, 形式与平面应力问题形式相同, 只需要做如下改动:

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$$

将应力应变关系记作原来的矩阵形式:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

应变位移关系

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \triangleq \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})$$

我们称  $\nabla$  为梯度算子

平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \triangleq \nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

边界条件:

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_x \\ \bar{T}_y \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{T}}$$



在二维问题，位移插值可以写作如下形式：

$$u = \sum N_i u_i$$

$$v = \sum N_i v_i$$

矩阵形式：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

引入记号：

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N}$$

表征应变矩阵

势能：

$$\Pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s$$

- 应变能：

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}$$

$\mathbf{k}_e$  称为刚度矩阵

- 体积力作功：

$$\Omega_b = - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = - \int_V (\mathbf{N}\mathbf{d})^T \mathbf{f} dV = - \mathbf{d}^T \left( \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV \right)$$

- 集中力作功：

$$\Omega_p = - \mathbf{d}^T \mathbf{P}$$

- 表面外力做功：

$$\Omega_s = - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T}_s dS = - \int_S (\mathbf{N} \mathbf{d})^T \mathbf{T}_s dS = - \mathbf{d}^T \left( \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T}_s dS \right)$$

将上述表达式带入后，最小势能原理给出：

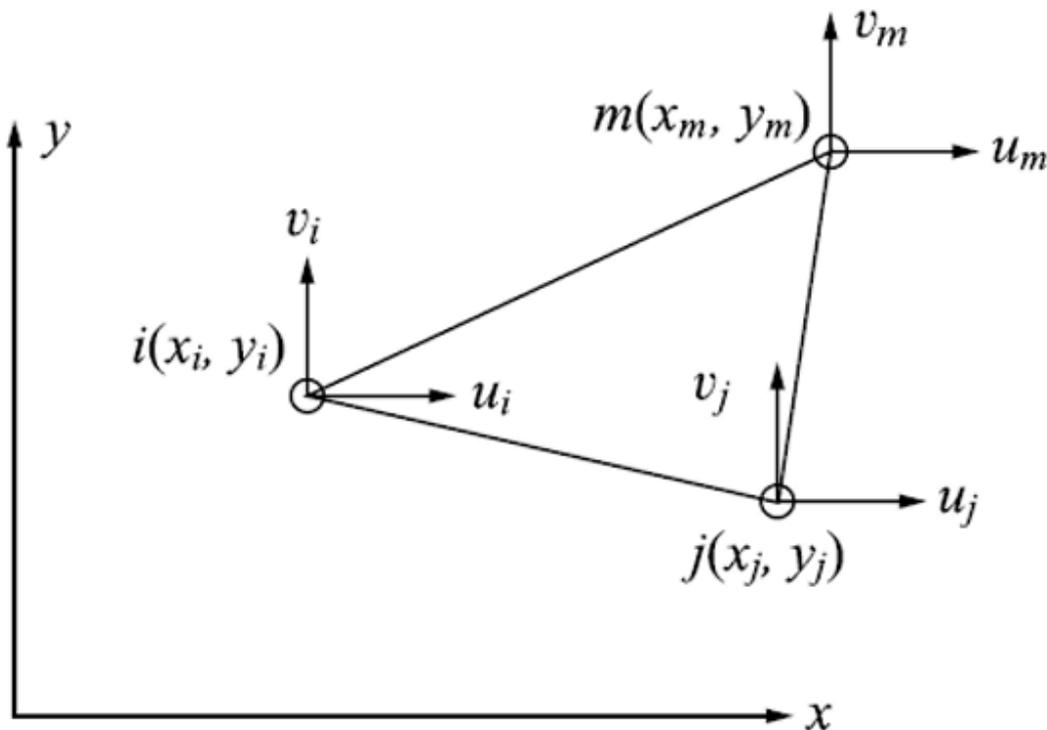
$$\frac{\delta \Pi_p}{\delta \mathbf{d}^T} = 0$$

可得：

$$\mathbf{k}_e \mathbf{d} = \underbrace{\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV}_{\text{体力的等效结点力}} + \underbrace{\mathbf{P}}_{\text{结点上的集中力}} + \underbrace{\int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T}_s dS}_{\text{面力的等效结点力}}$$



不同节点数的三角形元素可用于求解二维实体构件。线性三角形元素是为二维实体有限元分析开发的第一种元素。然而，与线性四边形元素相比，线性三角形元素的精确度较低。但三角形元素仍是一种非常有用的元素，因为它能适应复杂的几何形状。如果二维模型的几何形状非常复杂，就需要使用三角形元素。恒应变三角形（CST）是数学上最简单的元素。



对应型函数：

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned}$$

我们可以得到应变表达式：

$$\varepsilon_x = a_2, \varepsilon_y = a_6, \gamma_{xy} = a_3 + a_5$$

可见应变都是常量，这就是为什么我们称为常应变三角形

已知位移  $u_i, u_j, u_m, v_i, v_j, v_m$  和坐标  $x_i, x_j, x_m, y_i, y_j, y_m$  可确定  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  的值（带入上述表达写成矩阵形式并取逆）：

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix}$$

其中

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j)$$

（考虑行列式的几何意义，可得  $A$  为三角形面积）

$$\alpha_i = x_j y_m - x_m y_j \quad \alpha_j = x_m y_i - x_i y_m \quad \alpha_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$\beta_i = y_j - y_m \quad \beta_j = y_m - y_i \quad \beta_m = y_i - y_j$$

$$\gamma_i = x_m - x_j \quad \gamma_j = x_i - x_m \quad \gamma_m = x_j - x_i$$

型函数：

$$N_i = (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) / 2A$$

$$N_j = (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) / 2A$$

$$N_m = (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) / 2A$$

CST 的位移：

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

位移应变关系：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

刚度矩阵

$$\mathbf{k}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = tA(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B})$$

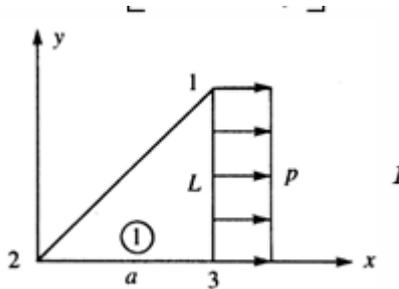
$A$  为元素的面积,  $t$  为平板厚度,  $\mathbf{k}_e$  式一个  $6 \times 6$  对称矩阵

体力对应的结点力:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \end{bmatrix}$$

$$\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV = \frac{At}{3} \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \end{Bmatrix}$$

也就是说, 体力被均分在结点上



表面作用力:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

一个栗子是我们假定  $p_x = p$   $p_y = 0$

$$\int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T}_s dS = tp \int \begin{Bmatrix} N_1(a, y) \\ 0 \\ N_2(a, y) \\ 0 \\ N_3(a, y) \\ 0 \end{Bmatrix} dy$$

取

$$N_1 = \frac{ay}{2A} \quad N_2 = \frac{L(a-x)}{2A} \quad N_3 = \frac{Lx-ay}{2A}$$

则可得

$$\int_S \mathbf{N}^T \mathbf{T}_s dS = \begin{Bmatrix} \frac{pLt}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{pLt}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Applications of the CST Element

- Use in areas where the strain gradient is small
- Use in mesh transition areas (fine mesh to coarse mesh)
- Avoid using CST in stress concentration or other crucial areas in the structure, such as edges of holes and corners
- Recommended for quick and preliminary FE analysis of 2D problems

当然除了恒应变三角形之外，我们还有其他二元元素。

如果我们三角形的每个边上再取一个结点，则我们得到了线性应变三角形 (Linear Strain Triangle, LST)。取对应位移表达式：

$$u = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy$$

应变：

$$\varepsilon_x = b + 2dx + fy$$

可以看出，应变是一个线性函数，他的结果比 CST 拟合效果更好。

矩形（四个结点）：

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned}$$

可以得出应变是一个线性函数

模仿LST，我们多取矩形边的中点，可得二次矩形，这是因为应变是二次形的。

- T3 : linear displacement, constant strain and stress;
- Q4: bilinear displacement, linear strain and stress;
- T6: quadratic displacement, linear strain and stress
- Q8: Cubic displacement, quadratic strain and stress.

# Axisymmetric Elements

## 有限元方法

对于轴对称问题，有：

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\theta} = 0$$

位移场：

$$u = u(r, z), w = w(r, z)$$

应变：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

应力：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}$$

采用CST划分：

$$\begin{aligned} u(r, z) &= a_1 + a_2 r + a_3 z \\ w(r, z) &= a_4 + a_5 r + a_6 z \end{aligned}$$

如果已知三点的位移  $u_i, u_j, u_m, w_i, w_j, w_m$ ，则同样可以定出：

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix} \triangleq \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

系数表达式与 [2D Problems](#) 中的相同

应变位移关系:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \frac{\alpha_i}{r} + \beta_i + \frac{\gamma_i z}{r} & 0 & \frac{\alpha_j}{r} + \beta_j + \frac{\gamma_j z}{r} & 0 & \frac{\alpha_m}{r} + \beta_i + \frac{\gamma_m z}{r} & 0 \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_m \\ w_m \end{Bmatrix}$$

记作

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

注意  $1/r$  项, 此时对应的应变并非是一个恒定的数

刚度矩阵

$$\mathbf{k}_e = 2\pi \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r dr dz$$

采用数值积分方法求解

体力:

$$\begin{aligned} f_r &= \rho r \omega^2 \\ f_z &= -\rho g \end{aligned}$$

转换为节点力:

$$\begin{aligned} \{f_b\} &= 2\pi \iint_S [\mathbf{N}]^T \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} r dr dz \\ \Rightarrow \{f_b\} &= \frac{2\pi \bar{r} A}{3} \begin{Bmatrix} \bar{f}_r \\ f_z \\ \bar{f}_r \\ f_z \\ \bar{f}_r \\ f_z \end{Bmatrix} \quad \bar{f}_r = \rho \bar{r} \omega^2 \bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3} \end{aligned}$$

表面力

$$\{f_s\} = \iint_S [\mathbf{N}]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} dS = \frac{2\pi r_j (z_m - z_j)}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_r \\ p_z \\ p_r \\ p_z \end{Bmatrix}$$

## Practical Consideration

### 有限元方法

长宽比定义为四边形单元最长尺度与最短尺度之比，在多数情况下，有限元方法给出的解的精度会随着长宽比的增大而降低，因此，为元素选择一个好的形状是至关重要的。对于一个四个节点的元素，我们要避免选择以下形状：

1. 有很大的长宽比
2. 形状接近三角形
3. 内角相差过大
4. 退化成为三角形的四边形



如果在几何、载荷或材料性质中发生了突变，需要考虑为突变的地方做一个（或多个）节点。

有时候，一个模型需要混合不同类型的单元，比如梁和平面单元。混合这些单元的问题在于每一个节点有不同的自由度，梁在每一个节点允许横向位移和旋转，但是对于平面单元，其只允许面内位移。梁可以承受一个节点处的集中力矩，而平面单元则不能，因此如果一个梁单元通过一个节点连接至平面单元，此时只能通过此点在不同类型单元之间传递力，这使得刚度矩阵为奇异矩阵。这种问题需要通过添加一个或多个梁单元，将梁拓展到平面单元解决。



适当运用对称性能加速问题的模拟，但在振动和屈曲问题中使用对称性要小心，因为并不是所有的振动模型或屈曲模型都对称。



精力凝聚（Static Condensation）是四边形单元经常采用的一种方法，一般而言，我们会在四边形对角线相交处临时引进一个想象的节点 5 以生成四个三角形，然后叠加这四个三角形创建四边形单元的刚度矩阵，那么此时我们所想象的内部节点其实是被凝聚掉了，并不会出现在最后的方程中，因此，只有与实际外部焦点相关的自由度进入方程。简而言之，通过消除内部（局部）自由度，将系统方程的维度降低。

考虑平衡方程：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_a \\ d_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_i \end{Bmatrix}$$

假定  $d_i$  与  $F_i$  是我们人为想象的内部节点对应的内部位移和荷载， $d_a$  与  $F_a$  是实际节点自由度和荷载。求解可得：

$$\{d_i\} = -[k_{22}]^{-1}[k_{21}]\{d_a\} + [k_{22}]^{-1}\{F_i\}$$

回代可得：

$$[k_{11}] - [k_{12}][k_{22}]^{-1}[k_{21}]\{d_a\} = \{F_a\} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{F_i\} \triangleq \boxed{[k_c]\{d_a\} = \{F_c\}}$$

这个新的方程组维度较小，仅涉及边界自由度，求解效率更高。



子结构法 (**Substructuring**) 是一种将大型结构划分为多个 (自然的) 组成部分进行分析的过程。这些组成部分的有限元模型被称为子结构 (**substructures**) 或超单元 (**superelements, SE**)。

也就是说将原始结构划分成多个子结构，每个子结构单独建立有限元模型，在主结构分析中只用保留边界节点，从而极大降低了自由度。



方程解法：

- 直接法：
  - 复杂度为  $\mathcal{O}(NB^2)$ ,  $N$  为矩阵维度  $B$  为方程条数
  - 适合中小问题，或者比较薄的结构
  - 容易处理复杂载荷情况
- 迭代法：
  - 解的复杂度不知
  - 减少存储需求
  - 适合大型问题或者大型矩阵
  - 需要根据不同载荷重新求解



有限元解的特点：

- FE Model – A mathematical model of the real structure, based on many approximations.
- Real Structure – Infinite number of nodes (physical points or particles), thus infinite number of DOF's.

- FE Model – finite number of nodes, thus finite number of DOF's

根据给定有限节点的位移约束位移场。

有限元模型比真实结构更为严苛，给出的位移一般偏小。实际上有限元模型给出了真实解的下限



Convergence: As the mesh in an FE model is “refined” repeatedly, the FE solution will converge to the exact solution of the mathematical model of the problem (the model based on bar, beam, plane stress/strain, plate, shell, or 3-D elasticity theories or assumptions)

- 网格加密
  - h-加密：减小单元尺寸（网格内部划分网格）
  - p-加密：提高单元上多项式阶数（网格边上加密节点）
  - r-加密：重新排列网格中的节点（局部加密）
  - hp-加密：结合 h-加密与 p-加密

# Isoparametric Formulation

## 有限元方法

实际上，三角形单元和矩形单元无法同时满足我们在建模复杂几何形状和高精度方面的需求。

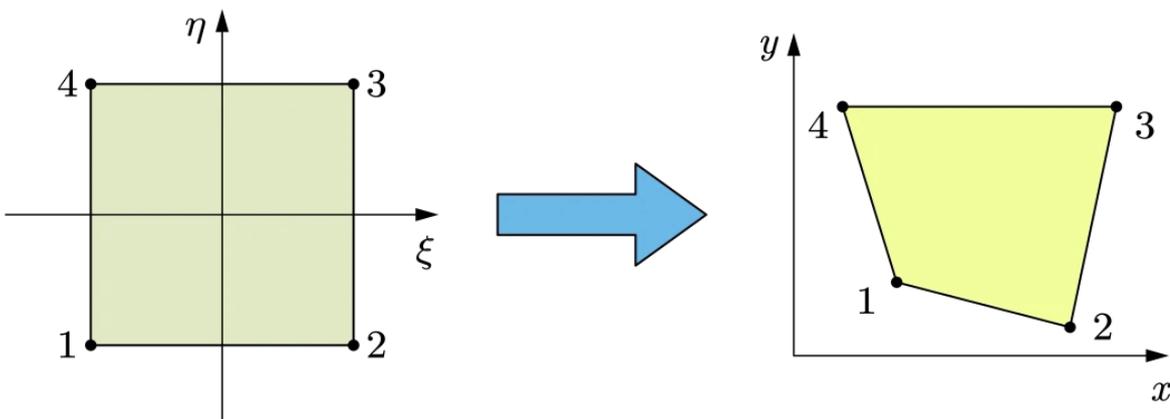
- 三角形网格：准确度低
- 矩形网格：只适用于简单网格
- 等参单元

在等参单元中，几何形状的描述和场变量（如位移、应力）的插值函数都使用相同的形函数，因此称为等参单元，

等参单元（任意直线四边形）适用各种几何情况，但是很难找到对应积分的解析形式。当我们涉及到的单元上的积分时，也就是：

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV$$

由于我们的等参单元是通过非线性映射得到的，这会导致  $\mathbf{B}$  不是一定常数，因此积分的形式会比较复杂，同时，在积分过程，我们不可避免地会对积分区域进行分割，这会导致积分形式变得更加复杂，所以积分对应的解析表达式会比较难给出。



我们考虑做一个变化，比如说将  $xy$  中的任意四边形变换成计算空间  $st$  中的正方形（上图是一个逆变化）。在计算空间中， $x$ ， $y$  由如下表达式给出：

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 s + a_3 t + a_4 st \\ y &= a_5 + a_6 s + a_7 t + a_8 st \end{aligned}$$

系数由如下方式给出：

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_1 + a_2(-1) + a_3(-1) + a_4(-1)(-1) \\
 x_2 &= a_1 + a_2(1) + a_3(-1) + a_4(1)(-1) \\
 x_3 &= a_1 + a_2(1) + a_3(1) + a_4(1)(1) \\
 x_4 &= a_1 + a_2(-1) + a_3(1) + a_4(-1)(1)
 \end{aligned}$$

尽管构建了物理空间到计算空间的映射，但我们还没有解得计算空间中的形函数，但我们知道形函数应该满足：

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{at node } i \\ 0 & \text{at nodes other than } i \end{cases}$$

因此采用如下方式计算形函数：

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t)
 \end{aligned}$$



定义 Jacobian 矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \end{bmatrix}$$

用来描述坐标变化

考虑应变矩阵：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N}$$

因为要求形函数对于  $x, y$  的偏导（注意此时形函数由计算空间中的形函数给出），所以需要做一个坐标变换。利用 Jacobian 矩阵，可以求得

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial N_i}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ -\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial N_i}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{bmatrix}$$

带入后可以求得应变矩阵

应变矩阵也可以写成如下显式形式：

$$\mathbf{B} = |\mathbf{J}|^{-1} [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]_{3 \times 8}$$

其中

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} aN_{i,s} - bN_{i,t} & 0 \\ 0 & cN_{i,t} - dN_{i,s} \\ cN_{i,t} - dN_{i,s} & aN_{i,s} - bN_{i,t} \end{bmatrix}$$

系数:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4} [y_1(s-1) + y_2(-1-s) + y_3(1+s) + y_4(1-s)] \\ b &= \frac{1}{4} [y_1(t-1) + y_2(1-t) + y_3(1+t) + y_4(-1-t)] \\ c &= \frac{1}{4} [x_1(t-1) + x_2(1-t) + x_3(1+t) + x_4(-1-t)] \\ d &= \frac{1}{4} [x_1(s-1) + x_2(-1-s) + x_3(1+s) + x_4(1-s)] \end{aligned}$$

显式 Jacobian

$$|\mathbf{J}| = \frac{1}{8} \{X_c\}^T \begin{bmatrix} 0 & 1-t & t-s & s-1 \\ t-1 & 0 & s+1 & -s-t \\ s-t & -s-1 & 0 & t+1 \\ 1-s & s+t & -t-1 & 0 \end{bmatrix} \{Y_c\}$$

$$\begin{aligned} \{X_c\}^T &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\} \\ \{Y_c\}^T &= \{y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4\} \end{aligned}$$

所以刚度矩阵可以写成如下形式

$$\mathbf{k}_e = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| ds dt$$

$h$  是当我们考虑到元素的厚度。

思考一个问题，什么样的元素算是有一个“好形状”的元素呢？他应当满足  $J > 0$ ，Jacobian 矩阵描述的单元区域在计算空间和物理空间中的面积变换比率，我们希望计算空间中的每一点都被唯一地映射到实际单元中，没有重叠和交叉，如果  $J = 0$ ，面积为零，形函数不可逆，如果  $J < 0$ ，：映射发生了翻转或交叉，就不是一对一的映射了，参考单元中某些点会被映射到同一点，物理上没有意义。

## Summary

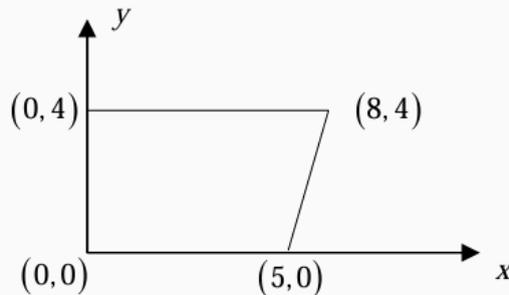
Jacobian 行列式  $\det(\mathbf{J})$  是衡量单元质量的关键

## Example

### Example

For the 4 node isoparametric element shown below, find

- (1) the Jacobian Matrix
- (2) the values of  $\partial N_1/\partial x, \partial N_2/\partial y$  at point (1.5, 2) in x-y coordinates



34

先求位移插值函数：

$$x = \sum N_i x_i = \frac{1}{4}(1+s)(13+3t)$$

$$y = \sum N_i y_i = 2(1+t)$$

然后可求得 Jacobian 矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} + \frac{3}{4}t & 0 \\ \frac{3}{4}(1+s) & 2 \end{bmatrix}$$

求取  $\frac{\partial N_1}{\partial x}$  和  $\frac{\partial N_2}{\partial y}$ ，先求表达式：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{|J|} \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial N_i}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial N_i}{\partial t} \\ -\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial N_i}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} = \frac{2}{13+3t} \begin{Bmatrix} 2 \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ -\frac{3(1+s)}{4} \frac{\partial N_i}{\partial s} + \frac{(13+3t)}{4} \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{t-1}{13+3t} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{2}{13+3t} \left[ -\frac{3(1+s)}{4} \frac{(1-t)}{4} - \frac{(13+4t)}{4} \frac{(1+s)}{4} \right] \end{aligned}$$

现在求取  $s$  和  $t$  的值，将  $x = 1.5, y = 2$  带入位移插值函数中，可得：

$$s = -\frac{7}{13} \quad t = 0$$

因此可以求得：

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{13} \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{12}{169}$$

## Shape Functions for Different Elements

### 8 node isoparametric 2D elements

Step 1: for nodes at the middle point of the edges

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-t) \quad N_6 = \frac{1}{2}(1+s)(1-t^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+t) \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-s)(1-t^2)$$

Step 2: for corner nodes, start with 4 node shape functions

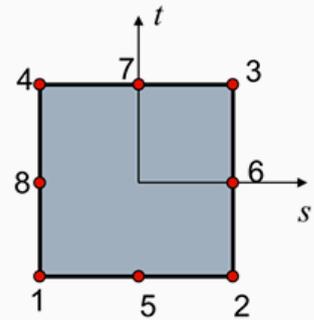
$$\hat{N}_1 = \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \quad \hat{N}_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t)$$

$$\hat{N}_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \quad \hat{N}_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t)$$

Step 3: modify the shape functions for the corner nodes

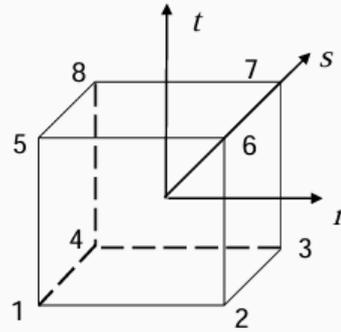
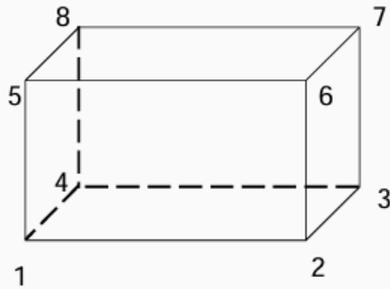
$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8 \quad N_2 = \hat{N}_2 - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6$$

$$N_3 = \hat{N}_3 - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7 \quad N_4 = \hat{N}_4 - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8$$



# Isoparametric Formula

## 8 node isoparametric 3D elements



$$N_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t)$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$$

# Numerical Integration

📖 有限元方法

📖 计算方法

我们有两种简单的格式来计算数值积分：

## 格式 1

1. 将积分区间分成  $N$  个小段
2. 选择一个函数来近似每个小段内  $f(x)$  的变化；最简单函数是等于每个小段中点处  $f(x)$  值的常数函数；
3. 这个常数函数与小段长度的乘积近似为该小段上  $f(x)$  的积分；
4. 将所有小段的乘积求和，得到  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上的积分的近似值。

格式 2：格式 2 的步骤基本上与格式 1 相同，但是选择每段中点的切线来近似  $f(x)$  的变化

采用数值方法进行积分有两个关键步骤：

1. 划分积分区域 (Divide the interval of integration)
2. 在每个子区域内，选择适当的简单函数来近似真实函数 (In each sub-interval, choose proper simple functions to approximate the true function.)

数值方法有两个两个关键特点：

1. 数值结果是对精确解的近似 (The numerical result is an approximation to the exact solution)
2. 数值结果的准确性取决于子区间的数量和选择的近似函数。(The accuracy of numerical result depends on the number of sub-interval and approximate function.)

一个关键的缺点是数值方法的准确性依赖于我们划分的积分区域的数量  $N$

在有限元分析中，我们需要估计如下积分形式的刚度矩阵：

$$\mathbf{k}_e = h \int_{B^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| ds dt$$

为了计算  $F(r)$  的数值积分，我们构造一个多项式函数  $\Phi(r)$ ，在给定  $n$  个点上满足：  
 $\Phi(r_i) = F(r_i)$ ，则取如下近似：

$$\int_a^b F(r) dr \approx \int_a^b \Phi(r) dr$$

$r_i$  被称为采样点或者积分点，点的位置和数量决定了数值积分的精度

两种主要的积分格式：

## 1. NewtonCotes积分 (NewtonCotes多项式)

## 2. Gauss积分 (Gauss多项式)

一般而言我们用  $n + 1$  来构造一个  $n$  阶多项式，但这意味着我们要解一个  $n + 1$  的线性方程组。我们采用拉格朗日插值来求取这个多项式。

 [Lagrange polynomial](#)

对应某个多项式函数，已知有给定的  $k + 1$  个取值点：

$$(x_0, y_0), \dots, (x_k, y_k)$$

应用拉格朗日插值公式得到的拉格朗日插值多项式为：

$$L(x) = \sum_{j=0}^k y_j \ell_j(x)$$

其中，每个  $\ell_j(x)$  表达式为：

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)}{(x_j - x_0)} \cdots \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} \cdots \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}$$

在 Newton-Cotes 格式中， $F$  的采样点是等距的。

$$\begin{aligned} \int_a^b F(r) dr &= \int_a^b \Phi(r) dr + R_n = \sum_{i=0}^n \left[ \int_a^b l_i(r) dr \right] F_i + R_n \\ &\xrightarrow{\xi = \frac{r-a}{b-a}} (b-a) \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 l_i(\xi) d\xi \right] F_i + R_n \end{aligned}$$

因为  $\int_0^1 l_i(\xi) d\xi$  只与划分的点数  $n$  有关，可以记为  $C_i^n$ ，则  $F$  的数值积分表达式为：

$$\int_a^b F(r) dr = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n F_i + R_n$$

其中  $R_n$  表示误差。

Intervals, $i$	No. of Points, $n$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
1	2	1/2	1/2					(trapezoid rule)
2	3	1/6	4/6	1/6				(Simpson's 1/3 rule)
3	4	1/8	3/8	3/8	1/8			(Simpson's 3/8 rule)
4	5	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		
5	6	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
6	7	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

如果  $F(r)$  是一个  $n$  阶多项函数, New-Cotes 格式应当给出精确解

如果考虑是在单位上的积分, 那么 Newton-Cotes 个数给出的解分别为:

$$I = \int_{-1}^1 F(x)dx = 2 \sum_{i=0}^n C_i F(x_i) + R_n = 2 \sum_{i=0}^n C_i F_i + R_n$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y) dx dy = 4 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m C_i C_j F(x_i, y_j) + R_n$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x, y, z) dx dy dz = 8 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p C_i C_j C_k F(x_i, y_j, z_k) + R_n$$

在 Newton-Cotes 格式中, 我们人为划分采样点, 故采样点是已知的; 而在 Gauss 格式中, 我们认为采样点是未知的, 我们引用如下新的多项式函数  $P(r)$ :

$$P(r) = (r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n)$$

取如下近似:

$$F(r) = \Phi(r) + P(r) (\beta_1 + \beta_2 r + \dots + \beta_n r^{n-1})$$

$\Phi(r)$  是通过插值已知函数得到的多项式。

这是一个  $2n - 1$  阶多项式, 带入积分并展开可得:

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{i=1}^n \left[ \int_a^b l_i(r) dr \right] F_i + \sum_{j=1}^n \left[ \int_a^b r^{j-1} P(r) dr \right] \beta_j + R_n$$

第一项是插值函数的积分; 第二项是我们引入的多项式函数积分结果, 我们不希望他影响到我们的数值积分结果, 因此利用正交性:

$$\int_a^b r^{j-1} P(r) dr = 0$$

这就是选择采样点的依据: 选择使  $P(r)$  与低阶多项式正交的点, 也称为高斯点。因此, 我们消掉了右边的第二项积分。为简化计算取变换:

$$r = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$

积分变为：

$$\int_a^b F(r)dr = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 F(\xi)d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \int_{-1}^1 l_i(\xi)d\xi \right] F_i = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n W_i F_i$$

称  $W_i$  为权重函数，这一般是满足假设要求的已知函数。如果  $F(r)$  是一个  $2n-1$  阶多项式，Gauss格式应该给出确定解。

如果考虑是在单位上的积分，那么 Gauss 个数给出的解分别为：

$$I = \int_{-1}^1 F(x)dx = \sum_{i=0}^n W_i F(x_i) + R_n = \sum_{i=0}^n W_i F_i + R_n$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x,y)dx dy = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m W_i W_j F(x_i, y_j) + R_n$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(x,y,z)dx dy dz = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^p W_i W_j W_k F(x_i, y_j, z_k) + R_n$$

常用的权重函数：

- 切比雪夫：

$$W(x) = (1-x^2)^{-1/2}$$

- 埃米特

$$W(x) = e^{-x^2}$$

勒让德求积：

点的数目	点的位置	权重 $W_i$
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0	8/9
	$\pm \sqrt{3/5}$	5/9
4	$\pm \frac{\sqrt{525-70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm \frac{\sqrt{525+70\sqrt{30}}}{35}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

## Summary

1. Newton-Cotes公式和Gauss公式都使用多项式函数来近似被积函数。
2. Newton-Cotes公式使用等间距采样点来构建多项式函数。因此，当使用n个采样点时，Newton-Cotes公式可以为(n-1)阶多项式提供精确积分。
3. Gauss公式使用不等间距采样点来构建多项式函数。当使用n个采样点时，Gauss公式可以为(2n-1)阶多项式提供精确积分。
4. Gauss公式提供了一种更高效的数值积分方案。
5. Gauss公式中的采样点位于积分域内，但Newton-Cotes公式中有两个采样点位于边界上。

尽管我们经常使用 Gauss 格式，但是 Gauss 并不能将边界点作为采样点，所以有时候也会用到 Newton-Cotes 格式

有了数值积分方法，现在的问题就是，我们需要几阶的积分，又需要多少个积分点？

假定希望得到的形函数多项式的阶次为  $p$ ，对于应变矩阵  $\mathbf{B}$  其阶次为  $p - 1$ （因为取一阶导数），考虑Jacobian行列式为常数，刚度矩阵：

$$\mathbf{k}_e = h \int_{B^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J| ds dt$$

对应的最高阶次

$$\mathcal{O}(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) = 2(p - 1)$$

如果在一个方向上有  $n$  个积分点，如果使用 Gauss 格式，为了精确求得积分，要求：

$$2n - 1 \geq 2(p - 1)$$

可得

$$n \geq \frac{2p - 1}{2}$$

一般而言，由于应变是对位移求一阶导数得到的，因此，通过数值方法得到应力应变的准确度会比位移得到的低。同时，有限元上的积分一般是在 Gauss 点上进行的，因此计算得到的 Gauss 点上的应力应变会比节点（nodal points）上的应力应变更为准确。

在有限元方法中，位移通常是采用连续的形函数来逼近的，位移在元素之间是连续的，但是在元素交界处不一定光滑（non-smooth），这导致了应变在相邻元素边界一般是不连续的，也就是说位移是  $C^0$  光滑的。应变的不连续会带有连一些问题，因此为了使得应变应变场是光滑的，我们对其做（加权）平均，从而使我们的结果更为平滑，也有其他平滑方法。

# Plate Bending Element

📖 有限元方法

📖 弹性薄板的弯曲

板可以视作梁的二维扩展形式。

- 只能承受法向载荷 (transverse loading)
- 初始状态是平的 (非平的板称为壳(shell))
- 板可以抵抗两个轴方向的弯曲和扭转

基本假设:

1. 厚度远小于板的长度或宽度(否则需要考虑切应力的作用)
2. 挠度远小于厚度(否则需要考虑板内的屈曲作用, 对于 von Karman 板)

基尔霍夫假设(Kirchhoff assumptions) : (PS:来自弹性力学)

1. 变形前垂直于薄板中面的直线段 (法线), 在薄板变形后仍保持为直线, 且垂直于弯曲变形后的中面, 其长度不变。如果我们选取薄板中面作为  $Oxy$  坐标平面, 则有  

$$\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0, \varepsilon_z = 0$$
2. 与其他应力分量相比, 垂直于中面的正应力  $\sigma_z$  和指向  $z$  轴的切应力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  很小, 在计算应变时可略去不计。
3. 薄板弯曲变形时, 中面内各点只有垂直位移  $w$ , 而无  $x$  方向和  $y$  方向的位移, 因此中面应变分量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  均等于零, 即中面无应变发生, 称中面内位移函数  $w(x, y)$  称为挠度函数

根据基尔霍夫假设给出的位移场:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

应变场:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z = -z \kappa_x \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z = -z \kappa_y \quad \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z = -z \kappa_{xy}$$

应力场:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned}$$

弯矩:

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2}\kappa_{xy}$$

其中

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

称为抗弯刚度。

板的物理方程为:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

应变能:

$$U = \frac{1}{2} \int (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dA$$

对于一个节点, 其节点位移矩阵

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$$

每个节点有三个自由度, 对于一个板单元, 我们有 12 个自由度, 定义:

$$\theta_x = +\frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

总单位位移矩阵:

$$\{d\} = \{[d_i] \quad [d_j] \quad [d_m] \quad [d_n]\}^T$$

位移插值函数:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

将位移插值函数带入到节点位移矩阵可得系数方程, 给出矩阵形式:

$$\{\psi\} = [P] \{a\}$$

为每一个节点计算如上方程, 整合可得:

$$\{d\} = [C] \{a\} \implies \{a\} = [C]^{-1} \{d\}$$

联系之前的系数方程有：

$$\{\psi\} = [P] \{a\} \implies \{\psi\} = [P][C]^{-1} \{d\}$$

定义形函数

$$[N] = [P][C]^{-1}$$

定义曲率矩阵：

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2a_4 - 6a_7x - 2a_8y - 6a_{11}xy \\ -2a_6 - 2a_9x - 6a_{10}y - 6a_{12}xy \\ -2a_5 - 4a_8x - 4a_9 - 6a_{11}x^2 - 6a_{12}y^2 \end{Bmatrix} = [Q] \{a\}$$

由于  $\{a\} = [C]^{-1} \{d\}$ ，则曲率矩阵

$$\{\kappa\} = [Q] \{a\} = [Q][C]^{-1} \{d\} = [B] \{d\}$$

其中  $[B]$  称为梯度矩阵。

可以导出弯矩方程：

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [D][B] \{d\}$$

其中  $[D]$  是本构矩阵，对于各向同性材料，满足：

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

刚度矩阵有如下形式给出：

$$[k] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy$$

分布载荷产生的表面力矩阵：

$$\{F_s\} = \iint [N_s]^T q dx dy$$

对于在大小在  $2b \times 2c$  的单元表面上作用均匀荷载  $q$  产生的力和力矩：

$$\begin{Bmatrix} f_{wi} \\ f_{\theta xi} \\ f_{\theta yi} \end{Bmatrix} = 4cbq \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{c}{12} \\ \frac{b}{12} \end{Bmatrix}$$

组装可得全局矩阵

# Nonlinearity

📖 有限元方法

## 非线性分析

非线性一般有以下三种来源：

1. 材料的非线性(Material nonlinearity)
2. 几何的非线性(Geometric nonlinearity)
3. 边界的非线性(Boundary nonlinearity)

在线性分析中，假定结果是线性的，也就是说，位移随载荷成比例的变化（小变形假设），但是在非线性分析中，这个结论就是失效了，刚度矩阵、载荷作用都和形状改变耦合在一起，因此，对于大变形而言，我们需要考虑形状的改变。在应力应变表达式中，也需要额外考虑非线性项，引起更为复杂的变形和更多的计算成本。

几何非线性是指当结构出现大变形时，其变化的几何形状可能会引起结构的非线性响应。一般包含以下几种情况：

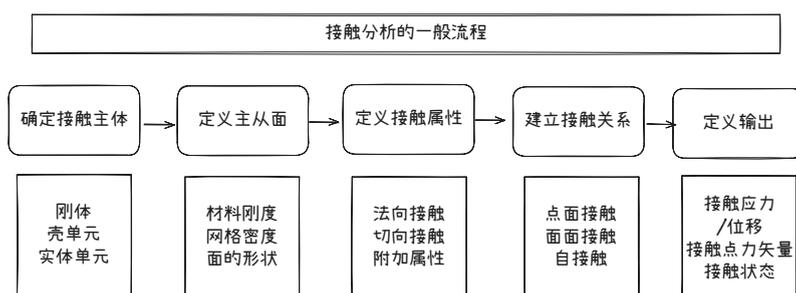
- 大挠度或者转动（破坏小变形假设）
- 突然翻转
- 初始力或载荷硬化

材料的非线性源自于外加载荷超过一定程度后，材料进入屈服阶段，变形量与拉力呈现出比较复杂的响应关系，统称为非线性关系。

边界的非线性行为是因为边界条件的变化而引起模型结构刚度的变化，影响应力应变的求解过程。比较典型的是接触分析，由于接触对的建立和分离会对模型的结构刚度造成比较大的影响，甚至发生不收敛情况。除了接触外，边界非线性还包括非线性弹性弹簧、薄膜、辐射、多点约束等，每增加一个边界非线性行为，就会增加有限元的求解难度。

## 接触分析

接触冲击（Contact-impact）分析是一个比较复杂的非线性问题，在分析过程中，接触问题的响应一般是非线性的。对于冲击问题，冲击产生时，表面的法向速度和切向速度都是不连续的。



接触行为主要分成两种：法向接触和切向接触，法向接触产生了接触压力，切向接触贡献了摩擦力。

接触行为分为三种：

1. 自接触，物体被压缩过程中，内表面发生的接触，内表面即是主面也是从面。
2. 点面接触，例如球拍与网球的接触，球拍上的节点为从面，网球的表面为主面。
3. 面面接触，主从面都是由单元面构成。

主从面的定义原则：

1. 刚体必须作为主面
2. 刚度大的作为主面，刚度小的作为从面
3. 网格粗的作为主面，网格细的作为从面
4. 节点只能作为从面
5. 一个主面对应一个从面
6. 在壳单元的接触中，接触面的法向相对，同一个面的法向保持一致
7. 尽量不要将 T 型面作为主、从面，可以将其拆分为两个面分别定义接触。

摩擦力主要有两种模型：

- 库伦摩擦模型 (Coulomb friction model)
- 界面本构模型 (Interface constitutive equation)

库伦模型要求：

- 当切向力小于滑动摩擦  $t_T < -\mu t_N$ ，产生黏附现象(adhered)
- 当切向力等于互动摩擦时，产生滑移现象(sliding)

滑移到黏附的变化使得切向速度突变到零，也导致了切向速度的不连续

## summary

如果材料经历了非常复杂的加载和卸载过程：

- 对于线性分析，可以很容易地找到给定应变（应力）值对应的应力（应变）值。
- 对于非线性分析，一个应变（应力）可能对应无限多个应力（应变）值。
- 在非线性分析中，必须使用增量方法来跟踪加载-卸载历史

## 残差

非线性问题中，外载和内力都变成复杂的函数：

Nonlinearity

$$I = f(u, \varepsilon, \theta, \dots)$$

$$P = f(u, \theta, t, \dots)$$

由于刚度的确定将变得复杂，且不再是一个常数，在求解该类问题时，一般采用增量法和弧长法，增量法适用于大多场景，而弧长法适用于屈曲分析等机构刚度突然变化的常见。

增量法是考虑分段施加载荷（而不是一次性施加）

定义残差：

$$R = P - K(u)u$$

当残差小于一定范畴时，认为计算收敛。Newton-Raphson 的核心就是计算残差。

Newton-Raphson 方法本质上采用如下迭代公式：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

但是我们需要计算导数，在迭代过程中非常耗时间。而且算法存在一定不收敛的可能

### summary

- 对于大多数有限元，我们使用增量方法(Incremental method)来求解问题。在每一个增量步骤中，我们都需要进行迭代计算。
- 非线性分析非常耗时，一次非线性分析的计算量相当于几十、几百，甚至上千次线性分析。
- 此外，有的时候需要计算切线（斜率矩阵）。

# Heat Problem

📖 有限元方法

📖 热应力

## Thermal Stress

考虑热应变问题：

$$\varepsilon_{ij}^0 = \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

当弹性体发生温度变化时，弹性体体内各点的微小长度在不受约束的情况下发生正应变  $\alpha \Delta T$ ，其中  $\alpha$  为线膨胀系数

热应变(thermal strains)并不会产生应力，想象一个受热自由膨胀的物体，其内部并没有应力的产生。

在受热情况下，将本构方程修改成如下形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0)$$

其他物理方程保持不变：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \\ \nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= 0\end{aligned}$$

利用最小势能原理导出刚度矩阵，势能满足：

$$\Pi_p = \underbrace{\int_B \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) dV}_{\text{Strain energy}} - \underbrace{\int_B f_i u_i dV - \int_{\partial B} \bar{T}_i u_i dS}_{\text{Potential of external forces}}$$

写成矩阵的形式：

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_B \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 dV - \int_B \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_{\partial B} \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS + \int_B (\boldsymbol{\varepsilon}^0)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 dV$$

势能最小原理给出：

$$\delta \Pi_p = 0$$

由于最后一项积分结果为常数，所以不纳入考虑，假定

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \implies \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{N}) \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$$

即满足我们最开始的假设带入后取对  $\mathbf{d}_e^T$  的偏导为零可得

$$\left( \int_B \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{d}_e = \left( \int_B \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV \right) + \left( \int_{\partial B} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS \right) + \int_B \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 dV$$

$\mathbf{f}_T$

这就是元素满足的刚度方程，将其装配后可得全局刚度方程，他与原来的方程相比多了一项由温度变化引起的力记作  $\mathbf{f}_T$

如果考虑的是一维杆问题，则：

$$\mathbf{f}_T = \begin{Bmatrix} -E\alpha\Delta T A \\ E\alpha\Delta T A \end{Bmatrix}$$

$A$  是横截面积。

二维情况：

- 平面应变：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- 平面应力：

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^0\} = \begin{Bmatrix} \alpha\Delta T \\ \alpha\Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

对于平面应力问题，如果我们考虑 CST 元素，此时热应力的影响被简化为：

$$\{\mathbf{f}_T\} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0 A$$

带入求解可得：

$$\{\mathbf{f}_T\} = \frac{\alpha E A t \Delta T}{2(1 - \nu)} [\beta_i \quad \gamma_i \quad \beta_j \quad \gamma_j \quad \beta_m \quad \gamma_m]^T$$

对于轴对称元素，热应力满足：

$$\{\mathbf{f}_T\} = 2\pi \bar{r} A \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^0$$

其中  $\bar{r}$  表示质心， $\bar{\mathbf{B}}^T$  表示质心  $\bar{z}$  对应的应变矩阵

# Heat Transfer

## 多物理场的有限元方法

1. 寻找控制方程(Governing equations)和边界条件(boundary conditions)
2. 使用变分法建立控制方程的弱形式及系统总势能
3. 选择合适的单元类型，并据此确定基本变量的插值函数（形函数）
4. 利用基本变量的插值函数构造系统总势能
5. 最小化系统总势能，以得到单元刚度矩阵和节点“力”向量
6. 汇总单元刚度矩阵和节点“力”向量，建立全局线性方程组

一维Fourier定律：

$$q_x = -K_{xx} \frac{dT}{dx}$$

能量守恒方程：

$$\begin{aligned} E_{in} + E_{generate} &= \Delta U + E_{out} \\ \implies q_x A dt + Q A dx dt &= \Delta U + (q_x + dq_x) A dt \end{aligned}$$

内能变化可以表示：

$$\Delta U = c\rho A dx dT$$

将上述带入可得热传导方程：

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = c\rho \frac{dT}{dt}$$

稳定状态时退化成：

$$K_{xx} \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0$$

如果在二维情况，可以拓展成：

$$K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0$$



如果用有限元方法求解热传导问题，此时系统势能写作：

$$\Pi_p = \underbrace{\frac{1}{2} \int_A \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dA}_U - \underbrace{\int_A QT dA}_{\Omega_Q} - \underbrace{\int_{\partial S} T \bar{q} ds}_{\Omega_q}$$

此时变量只有  $T$ ，变分原理给出：

$$\delta \Pi_p = 0$$

首先需要针对问题选择合适的元素，然后为温度选择合适的形函数：

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i T_i \triangleq \mathbf{N} \mathbf{T}_d$$

$\mathbf{T}_d$  表示节点温度，将上述表达式带回势能，求出应变矩阵：

$$\begin{aligned} \Pi_p &= \frac{1}{2} \int_A \left[ K_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_A QT dA - \int_{\partial S} T \bar{q} dS \\ &= \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} dA - \int_A QT dA - \int_{\partial S} T \bar{q} dS \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_d^T \left( \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} dA \right) \mathbf{T}_d - \mathbf{T}_d^T \left( \int_A Q \mathbf{N}^T dA \right) - \mathbf{T}_d^T \left( \int_{\partial S} \bar{q} \mathbf{N}^T dS \right) \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{T}_d \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}$$

根据最小势能原理可得刚度矩阵（此时考虑一个厚度为  $h$  的板）：

$$\mathbf{k}_e = h \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} dx dy$$

转换成等参形式：

$$\mathbf{k}_e = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} |\mathbf{J}| ds dt = \sum_{i=1}^{I_p} \sum_{j=1}^{I_p} \mathbf{B}^T(s_i, t_j) \mathbf{K} \mathbf{B}(s_i, t_j) |\mathbf{J}(s_i, t_i)| \alpha_i \alpha_j$$

等效外力矩阵：

$$\mathbf{P}_e = \underbrace{\int_A Q \mathbf{N}^T dA}_{\text{Internal heat source}} + \underbrace{\int_{\partial S} \bar{q} \mathbf{N}^T dS}_{\text{Surface heat flow into the element}}$$

所以得到此时的“刚度”方程：

$$\mathbf{k}_e \mathbf{T}_d = \mathbf{P}_e$$



现在讨论边界条件：考虑左端  $x_A$  流入热流，右端  $x_B$  置放在恒温  $\bar{T}$  环境，对应第一种和第二种边界条件，给出：

- $x = x_A$

$$-K_{xx} \frac{dT}{dx} = \bar{q}_x$$

- $x = x_B$

$$T = \bar{T}$$

如果是二维情况，第二种边界条件为：

$$\bar{q}_n = K_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} n_y$$

$n_x$  和  $n_y$  分别为热流法向到  $x$  轴和  $y$  轴的投影

# Vibration

📖 有限元方法

## Single DOF System

振动方程:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)$$

无阻尼和外加激励情况下可简写成:

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

假定解  $u = U \sin(\omega t)$ , 带入可得固有频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

考虑阻尼作用, 定义阻尼比:

$$\xi = \frac{c}{c_0} \quad c_0 = 2m\omega = 2\sqrt{km}$$

此时对应固有频率:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

当  $0 \leq \xi \leq 0.15$  时 (称为结构阻尼), 近似取

$$\omega_d \approx \omega$$

这种情况下, 在模态分析中可以忽略阻尼影响

## Multiple DOF System

整体结构:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$$

其分别代表: 惯性力, 耗散力, 弹性力和外加力。

根据质量在单元内的分布方式, 质量矩阵主要有两种形式: 集中质量矩阵(Lumped Mass Matrix) 和一致质量矩阵 (Consistent Mass Matrix)。

利用动能导出一致质量矩阵:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^2 dV &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\mathbf{u}}^T) \dot{\mathbf{u}} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}})^T (\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}) dV \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

因此，一致质量矩阵可以描述为通过在单元体积内对形函数的乘积与密度进行积分得到更准确地表示连续体中的质量分布：

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$$

- 矩阵通常是对称的，包含非零的非对角项，表示不同自由度之间的质量耦合。
- 能更准确地表示结构的惯性特性，特别适用于需要精确动态响应的分析，如模态分析和隐式动力学分析。
- 计算和存储成本较高，尤其在大规模问题中

集中质量矩阵是一种更简单且通常更有效的方法，用于表示结构内的分布质量将单元质量集中分配到节点上,特点：

- 矩阵为对角矩阵，非对角项为零，计算和存储效率高。
- 适用于显式动力学分析和大规模问题，能显著减少计算时间。
- 在某些情况下，可能会低估结构的惯性效应，影响高阶模态的准确性。

理论上，集中质量矩阵产生的精度低于一致质量矩阵。但在实践中，当网格足够细化时，集总质量近似的精度与一致质量的精度相当。对于结构的较低振动模式尤其如此。集中质量矩阵通常会产生低于精确值的固有频率。

### ☰ Example

考虑一个一维简单杆元素，有两个节点，集中质量矩阵为：

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\rho AL}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho AL}{2} \end{bmatrix}$$

一致质量矩阵：

$$\mathbf{M} = \int \rho \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix} [1 - \xi \quad \xi] AL d\xi = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$$

对于保守系统：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0$$

假定取周期解： $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \sin(\omega t)$ ， $\bar{\mathbf{u}}$  表示节点位移的向量，可得：

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \bar{\mathbf{u}} = 0$$

这是一个广义特征值问题（EVP），则非奇异解要求：

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$$

满足上述等式的解  $\omega_i$  称为结构的固有频率，将最小的  $\omega_1$  称为基频，每一个  $\omega_i$  对应一个特征向量  $\bar{\mathbf{u}}_i$  称为模态，满足正交性：

$$\bar{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{u}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \omega_i^2 & i = j \end{cases}$$

- 正常模态分析中，位移（模态）或应力的大小并没有物理意义，因为我们只考虑频率和对应的振动模式（模态形状）
- 对于正常模态分析，并不需要考虑外部约束
  - $\omega_i = 0 \Leftrightarrow$  整个结构或结构的一部分做刚体运动
  - 如果  $\omega_i = 0$ ，需要检查有限元模型，如模型中存在刚体运动或自由元件（Free Elements）。这可能是由于模型设置不当，例如没有正确地施加边界条件或支撑，导致模型可以自由移动而没有受到约束。
- 在有限元计算中，较低的模态比较高模态更准确。因此对于低模态而言，达到足够精度需要的有限元模型的元素数量较少（因为较低模态对应的波长比较长，我们可以使用较粗的网格）

# Weighted Residual Methods

📖 有限元方法

👤 [main](#)

## Weighted Residual Methods

微分方程的解要求处处满足物理方程和边界条件，但实际上这是一个非常严苛的要求，或者说解的强形式。实际上，找到一个满足上述要求的微分方程的解并不是一件容易的事情，因此，与其找到一个强解，不如找到一个满足如下条件的弱解：

$$\int_V [\sigma(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)_{ij,j} + f_i] dV = 0$$

$\tilde{u}_k$  为近似解。将积分内部的项称为残差 (residual)，此时放松了解的条件：

$$R_i \neq 0 \quad \int_V R_i dV = 0$$

如果希望进一步对残差有所限制，则引入权函数  $W$ ，要求

$$\int_V W R dV = 0$$

加权残差法有如下方法：

- Collocation 要求网格上每一个点  $R = 0$  (实际上权函数为狄拉克函数)
- Subdomain  $\int_V R dV = 0$
- Least Squares  $\int_V R^2 dV = 0$
- Galerkin  $\int_V N_i R dV = 0$

考虑一个微分方程：

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$$

边界条件：

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

准确解：

$$u = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

取一个满足边界条件的近似解：

$$\bar{u} = x(1-x)(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots)$$

- 一阶近似:

$$\bar{u} = a_1x(1-x)$$

将近似解代入微分方程中可得残差

$$R_1 = x + a_1(-2 + x - x^2)$$

- 二阶近似:

$$\bar{u} = x(1-x)(a_1 + a_2x)$$

对应残差:

$$R_2 = x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)$$

Collocation 方法要求选定节点  $R(x_i) = 0$ ，对于一阶近似取中点  $x = 1/2$ ，可得  $a_1 = \frac{2}{7}$ ；对于二阶近似，取三等分点  $x = 1/3$   $x = 2/3$  可得  $a_1 = 0.1948, a_2 = 0.1731$

对于 Galerkin 方法，先考虑一阶近似，由于近似解本身是给定基函数的线性组合  $\bar{u} = \sum N_i a_i$ ，所以取

$$W_1 = N_1 = x(1-x)$$

积分得

$$\int_0^1 W_1 R dx = \int_0^1 x(1-x)(x + a_1(-2 + x - x^2)) = 0 \implies a_1 = \frac{5}{18}$$

再考虑二阶近似，取第二个权函数:

$$W_2 = x^2(1-x)$$

分别积分可得近似解:

$$\bar{u} = x(1-x)(0.1924 + 0.1707x)$$

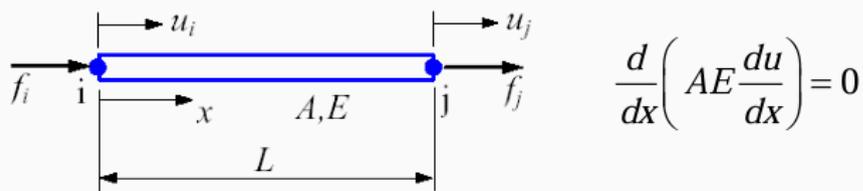
## Galerkin's Method

用 Galerkin 方法求出刚度矩阵和待定方程

## Steps in Applying Galerkin's Method

1. 定出控制偏微分方程 (PDE) 和边界条件 (BCs)
2. 定出残差方程
3. 计算分布积分
4. 将插值函数带入残差方程
5. 计算单元积分获得代数有限元形式方程

## One-Dimensional Bar Element Equations



### Galerkin's Method

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{d}{dx} \left( AE \frac{du}{dx} \right) N_i dx = 0 \quad (i=1, 2)$$

$$\left( N_i AE \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L - \int_0^L AE \frac{du}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = 0$$

The integration by parts introduces the boundary conditions

21

考虑一根杆 (只受横向作用  $f_i, f_j$ ), 其对应的微分方程满足:

$$\frac{d}{dx} \left( A(x)E(x) \frac{du}{dx} \right) = 0$$

根据 Galerkin 法, 残差积分满足:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left( A(x)E(x) \frac{du}{dx} \right) N_i dx = 0$$

分部积分可得:

$$\left( N_i AE \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L - \int_0^L A(x)E(x) \frac{du}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = 0$$

分布积分的结果引入了边界条件。

杆单元中， $\frac{du}{dx}$  可以写作：

$$\frac{du}{dx} = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

带入分布积分可得（考虑横截面积和杨氏模量为常数）：

$$AE \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] dx \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \left( N_i AE \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L$$

因为在杆问题中，只有两个形函数，所以上面给出两个等式，取第一个形函数  $N_1$  给出

$$f_i = \frac{AE}{L} (u_i - u_j)$$

取第二形函数，可得

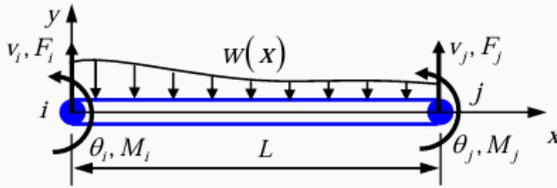
$$f_j = \frac{AE}{L} (u_j - u_i)$$

装配可得：

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

与直接法和能量法得到的方程一样。

# Beam Element Equations



$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + w = 0$$

## Galerkin's Method

$$\int_0^L \left( EI \frac{d^4 v}{dx^4} + w \right) N_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Shape function  $N_i$  are defined by

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2 L + L^3) \quad N_2 = \frac{1}{L^3} (x^3 L - 2x^2 L^2 + xL^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2 L) \quad N_4 = \frac{1}{L^3} (x^3 L - x^2 L^2)$$

25

控制方程:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + w = 0$$

伽辽金方法给出:

$$\int_0^L \left( EI \frac{d^4 v}{dx^4} + w \right) N_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

对第一项积分做两次分部积分

$$\int_0^L \left( EI \frac{d^4 v}{dx^4} \right) N_i dx = \int_0^L EI \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} dx + EI \left( N_i \frac{d^3 v}{dx^3} - \frac{dN_i}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_0^L$$

对位移插值函数做微分

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{12x-6L}{L^3} & \frac{6xL-4L^2}{L^3} & \frac{-12x+6L}{L^3} & \frac{6xL-2L^2}{L^3} \end{bmatrix} \{d\} = [B] \{d\}$$

同时有:

$$M(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad F(x) = EI \frac{d^3 v}{dx^3}$$

带入可得

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left( EI \frac{d^4 v}{dx^4} + w \right) N_i dx \\ &= \int_0^L \frac{dN_i^2}{dx^2} EI [B] dx \{d\} + \int_0^L N_i w dx + \left[ N_i F(x) - \frac{dN_i}{dx} M(x) \right] \Big|_0^L = 0 \end{aligned}$$

将形函数带入就可以导出梁元素满足的方程：

$$[K] \{d\} = [F_i \quad M_i \quad F_j \quad M_j]^T - \int_0^L [N]^T w dx$$

其中刚度矩阵由如下式子导出：

$$[K] = \int_0^L [B]^T EI [B] dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$