

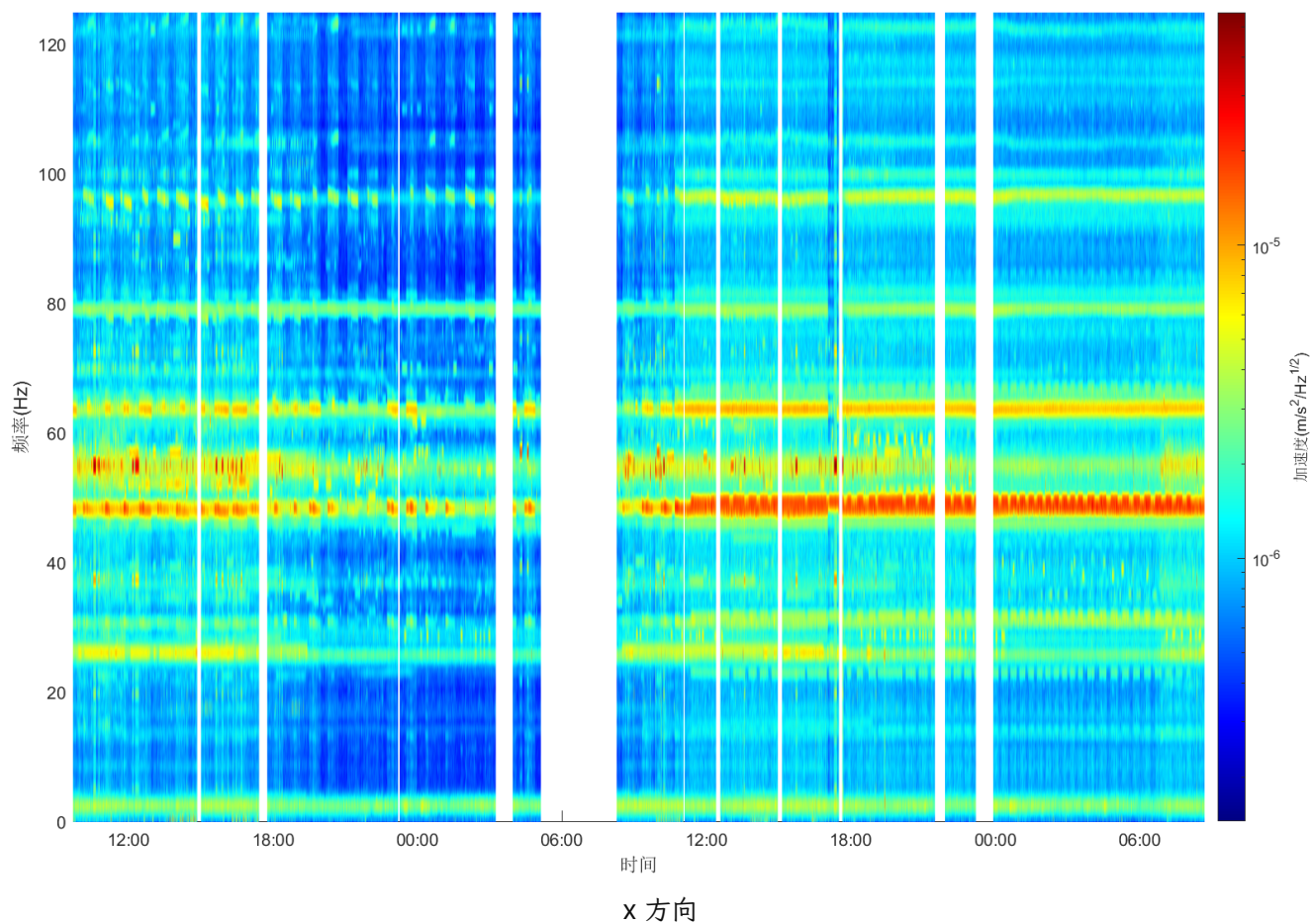
信号分析

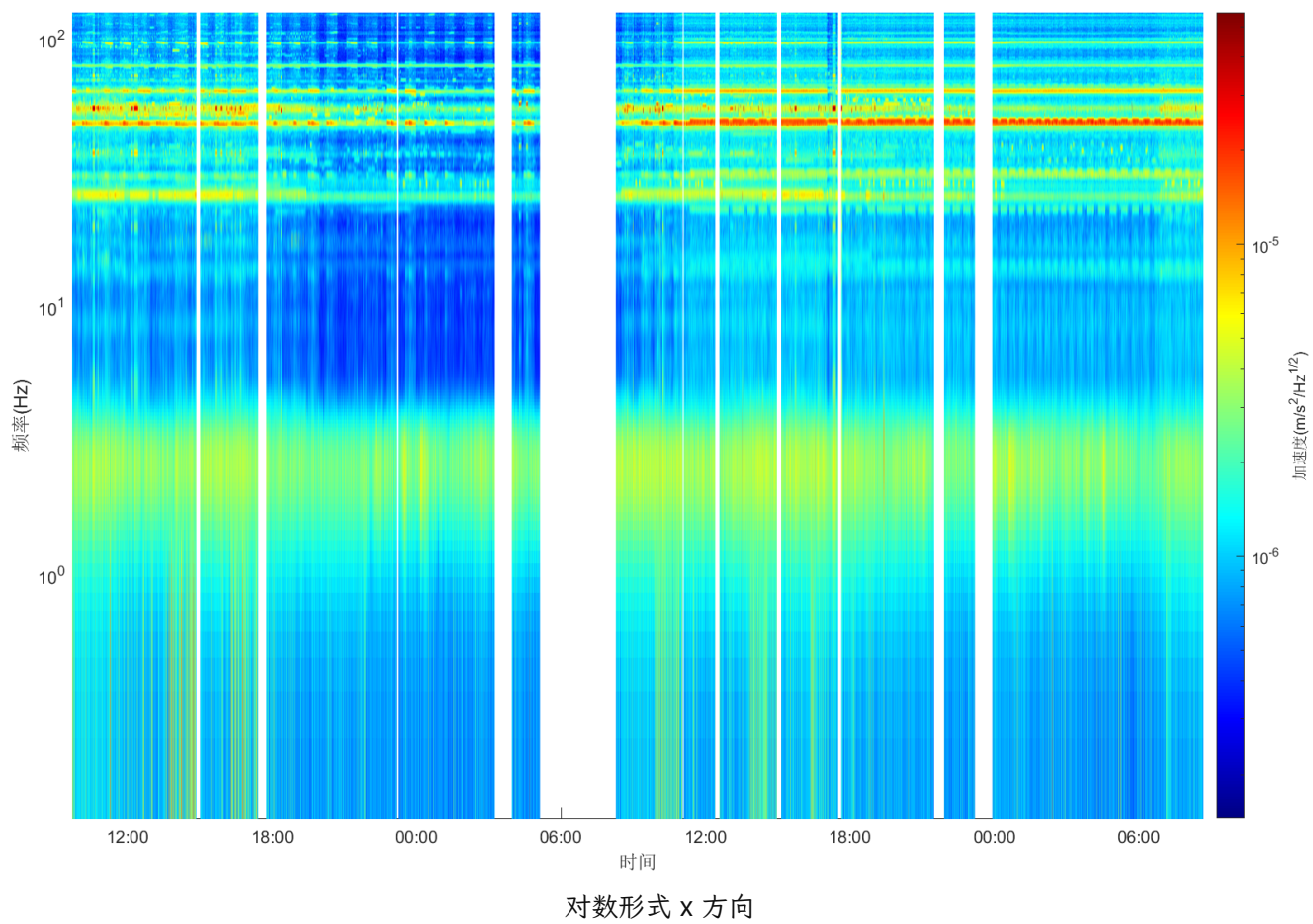
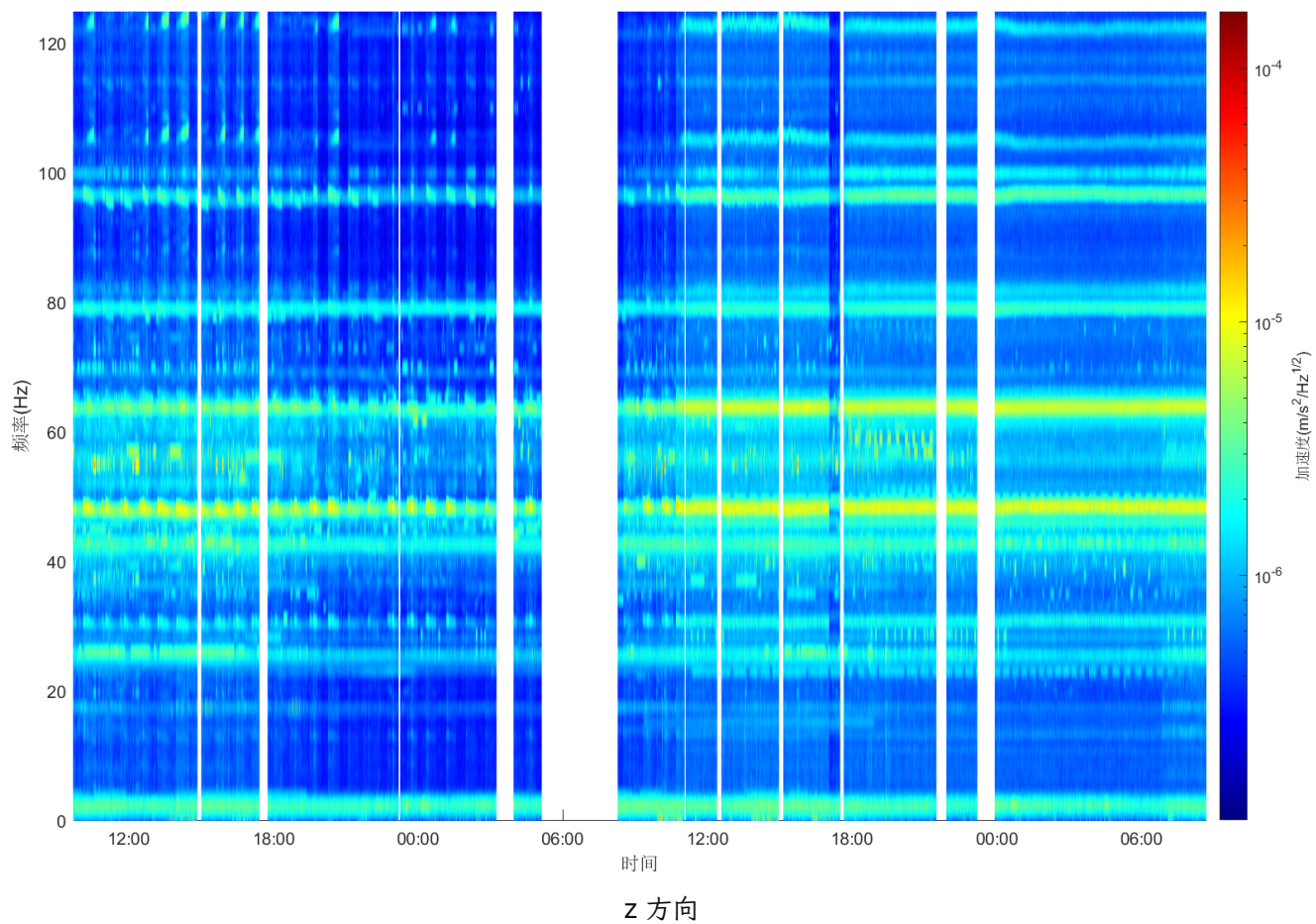
PSD 的时频分析

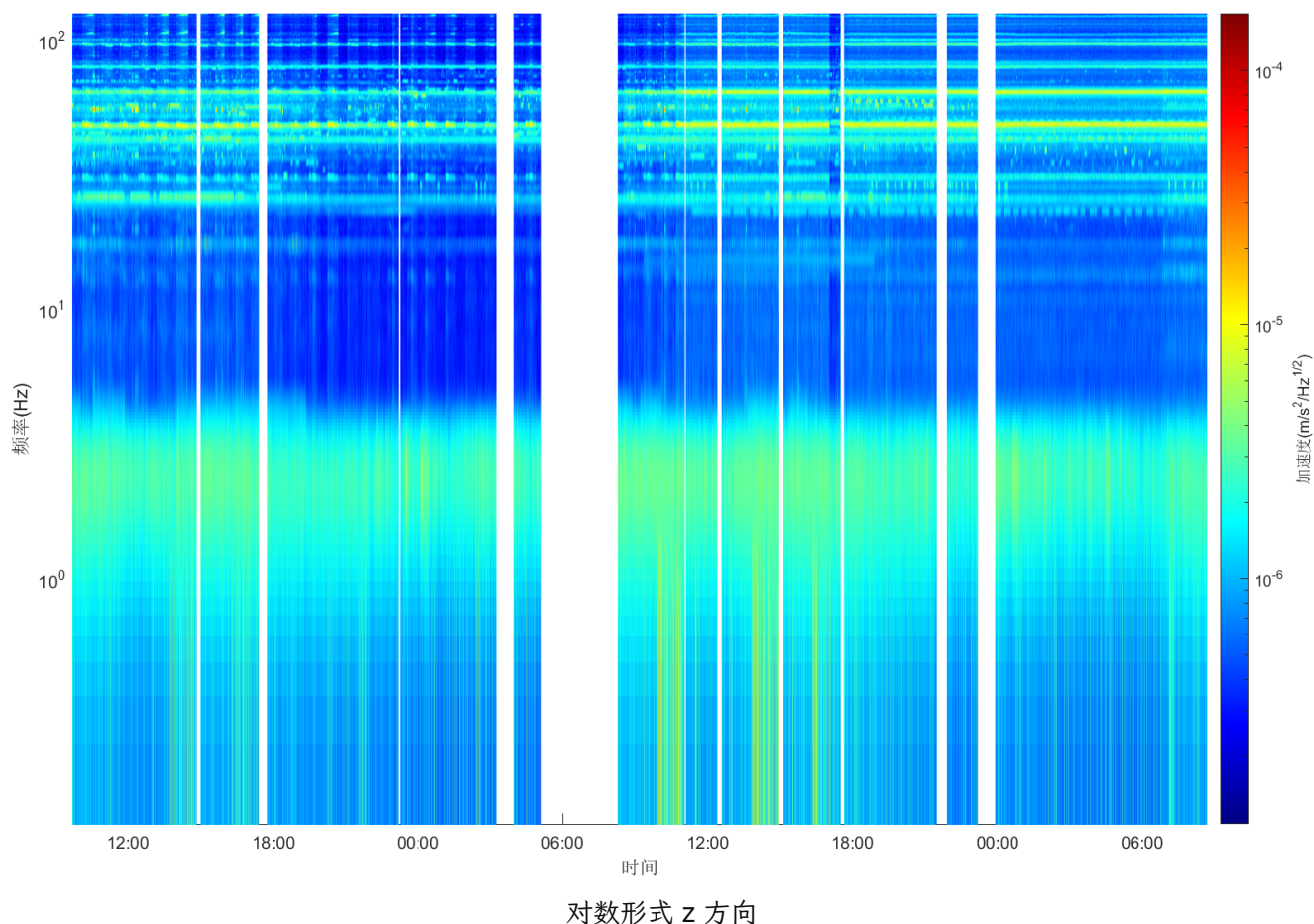
Method

将原始数据分割成多个时间段，然后对每个时间段上做 PSD 分析，然后将得到的 PSD 谱沿时间轴拼接成时频图。但这个方法不能同时兼顾时间分辨率和频率分辨率，为了在时间分辨率和频率分辨率上得到良好的效果，经过测试选取 10s 作为时间分辨率。

数据分析







可以看出利用 PSD 做时频分析，X方向和Z方向频率均主要集中到几个稳定的频带中，分别为 2Hz、27Hz、30Hz、42Hz、48Hz、55Hz、63Hz、79Hz、98Hz。这几个频带能量密度的分布也较集中。但相比之下，z 方向上总体能量密度比较低，模态上的能量也比较低。对于相关频率的分析需要结合具体的物理情况。

从时间上分析，信号呈现较为明显的昼夜变化，夜间的能量密度低于白天的能量密度。除此之外，第一天的能量密度在整个频域上呈现周期约为45min的变化。

HHT

Method

我们主要运用基于变分模态分解（VMD）的希尔伯特黄变换（HHT）。VMD 利用迭代搜索变分模型最优解来将信号分解成多个模态，有效抑制传统 EMD 方法引起的模态混叠现象，然后对每个模态进行希尔伯特变换，从而得到每个模态的频率和幅值等相关信息，这种方法能够更准确地分析信号的时频特性，特别适用于处理复杂、非平稳的信号。

希尔伯特黄变换

1905年，Hilbert在研究黎曼-希尔伯特问题时提出希尔伯特变换，希尔伯特变换（HT）的定义式如下：

$$H(x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau$$

其中， $x(t)$ 为信号函数。希尔伯特变换可以理解为信号函数和函数 $\frac{1}{\pi t}$ 的卷积。在时间域上，希尔伯特变换将信号的相位延迟90度。

对于一个实信号 $x(t)$ ，利用希尔伯特变换可以构造出一个解析信号：

$$z(t) = x(t) + jy(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

其中， $y(t)$ 是实信号 $x(t)$ 经过希尔伯特变换得到的结果。相较于实信号，解析信号除了可以清楚的刻画各个时刻的幅值外，还能刻画出对应的相位信息。对解析信号的相位进行求导，可以进一步地表示出信号的瞬时频率，瞬时频率的定义如下：

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

因此，通过希尔伯特变换得到的解析信号同时包含时域和频域的信息，在时频分析上具有较大的优势。

但是，通过希尔伯特变换构造出的解析信号具有单值性，如果实际信号同时包含多个频率，即由多个频率信号叠加而成时，希尔伯特变换就很难得到真实的相位信息，对瞬时频率的求解造成干扰。

1998年黄锷等人提出了经验模态分解（EMD）并引入了希尔伯特谱的概念和希尔伯特谱分析的方法，建立了希尔伯特-黄变换（HHT）。

希尔伯特-黄变换的主要思路如下：通过EMD将含有多个频率的信号分解为多个固有模态函数（IMF），从而将信号中的多个频率分开，然后在对每一个IMF作希尔伯特变换，进而实现含有多个频率的信号的时频分析。

其中，经验模态分解（EMD）的思路如下：

由经验模态分解（EMD）得到IMF需要满足以下两个条件：

1. 均值线的平均值趋近于0
2. 原始信号的极值点个数和原始信号同 $y=0$ 的交点个数之差不能大于1（小于等于1）

一般而言，经验模态分解（EMD）会根据信号 $x_0(t)$ 的极值点绘制出信号的上包络线 $a(t)$ 和下包络线 $b(t)$ ，然后求出信号上下包络线的平均值：

$$mean(t) = \frac{a(t) + b(t)}{2}$$

将信号 $x_0(t)$ 减去该平均值，即可得到一个IMF，即：

$$IMF_1 = x_0(t) - mean(t)$$

之后将信号 $x_0(t)$ 减去IMF，得到残余的信号 $x_1(t)$ ，即：

$$x_1(t) = x_0(t) - IMF_1$$

之后对残余的信号重复上述过程，从而得到多条IMF。

但是，EMD往往存在端点效应，且其得到的IMF往往仍然包含多个频率，产生模态混叠的现象。为了避免上述的问题，后续模态分解的方法不断进行了迭代优化，其中变分模态分解（VMD）是一种比较典型的优化方法。

变分模态分解

论文：[Variational Mode Decomposition](#)

参考：[知 类EMD的“信号分解方法”及MATLAB实现（第四篇）——VMD - 知乎](#)

“ VMD 假设任何信号都是由一系列具有特定中心频率、有限带宽的子信号组成。其以经典维纳滤波为基础，通过对变分问题进行求解，得到中心频率与带宽限制，找到各中心频率在频域中对应的有效成分，得到模态函数。

VMD 算法定义了约束条件更为严格的有限带宽的本征模态函数，该内涵模态分量被定义为调幅调频的分量模态函数：

$$u_k(t) = A_k(t) \cos(\phi_k(t))$$

$A_k(t)$ 为信号的包络幅值， $\phi_k(t)$ 为瞬时相位。

在 VMD 中信号经过如下三步处理：

1. Hilbert 变换求解析信号
2. 将信号平移到基带
3. 利用梯度的 L_2 范数的平方来估计信号的带宽

最终得到如下约束变分模型为：

$$\begin{aligned} \min_{\{u_k\}, \{\omega_k\}} & \left\{ \sum_k \left\| \partial_t \left[\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_k(t) \right] e^{-j\omega_k t} \right\|_2^2 \right\} \\ \text{s. t. } & \sum_k u_k = f \end{aligned}$$

其中 $\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) * u_k(t)$ 表示计算 $u_k(t)$ 的解析信号： $u_k(t) + j \cdot \mathcal{H}(u_k(t))$ ， $\mathcal{H}$ 表示 Hillber 变换， $e^{-j\omega_k t}$ 表示中心频率移至基带。

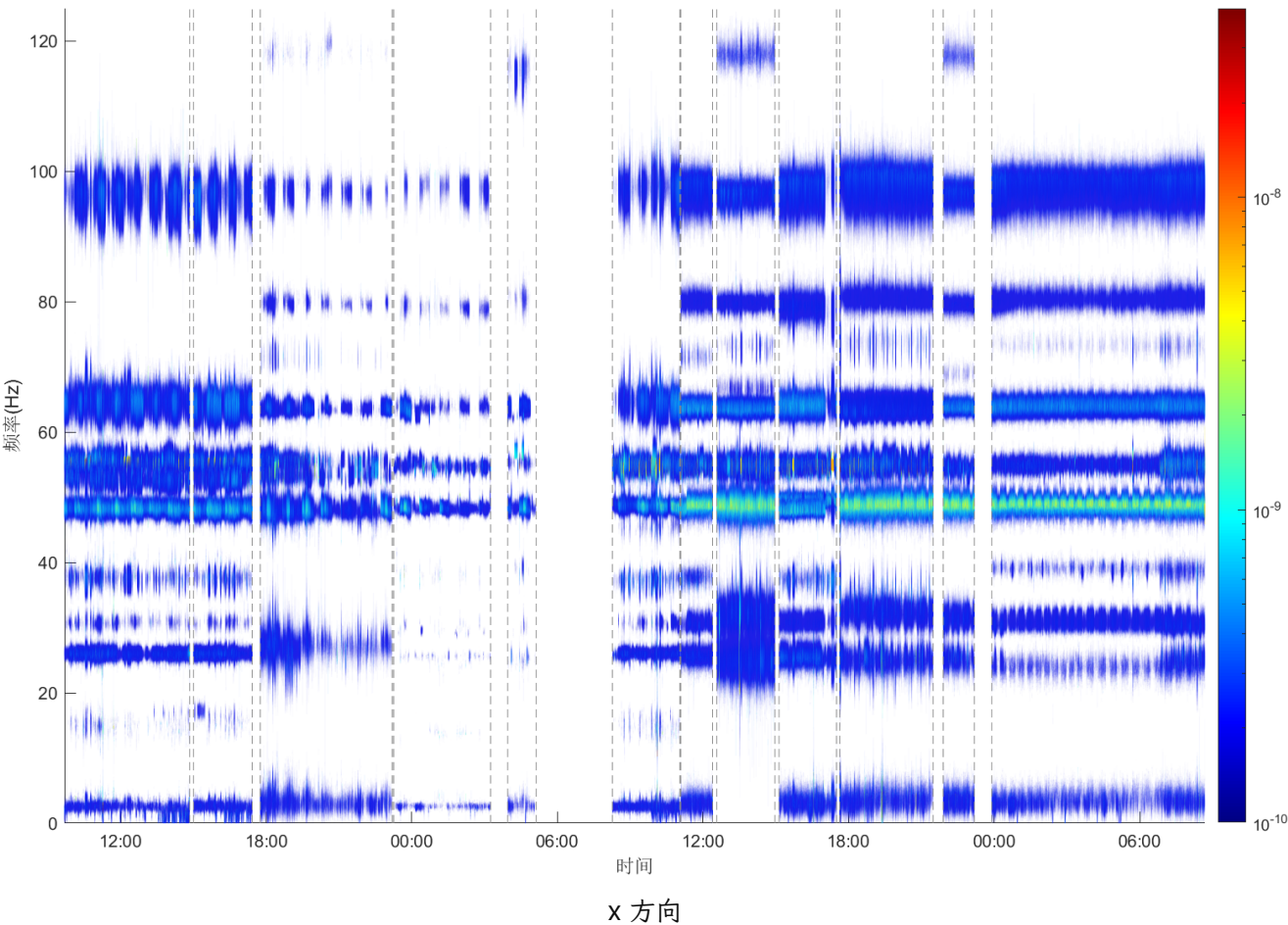
实际上这也就是一个约束状态下多元函数求解值问题，求解如上变分模型极值问题可得“每个模态分量中心频率的带宽之和最小”时的模态函数 u_k 和中心频率 ω_k

VMD 的独特优势：

1. 可以指定得到的模态数
2. 稀疏性
3. 避免模态混叠

但是 VMD 算法的效果依赖于预先设定的模态分量的个数 K ，若 K 偏小，则会导致分解不充分引起模态混叠现象，若 K 偏大，则会产生一些没有用的虚假分量。

数据分析

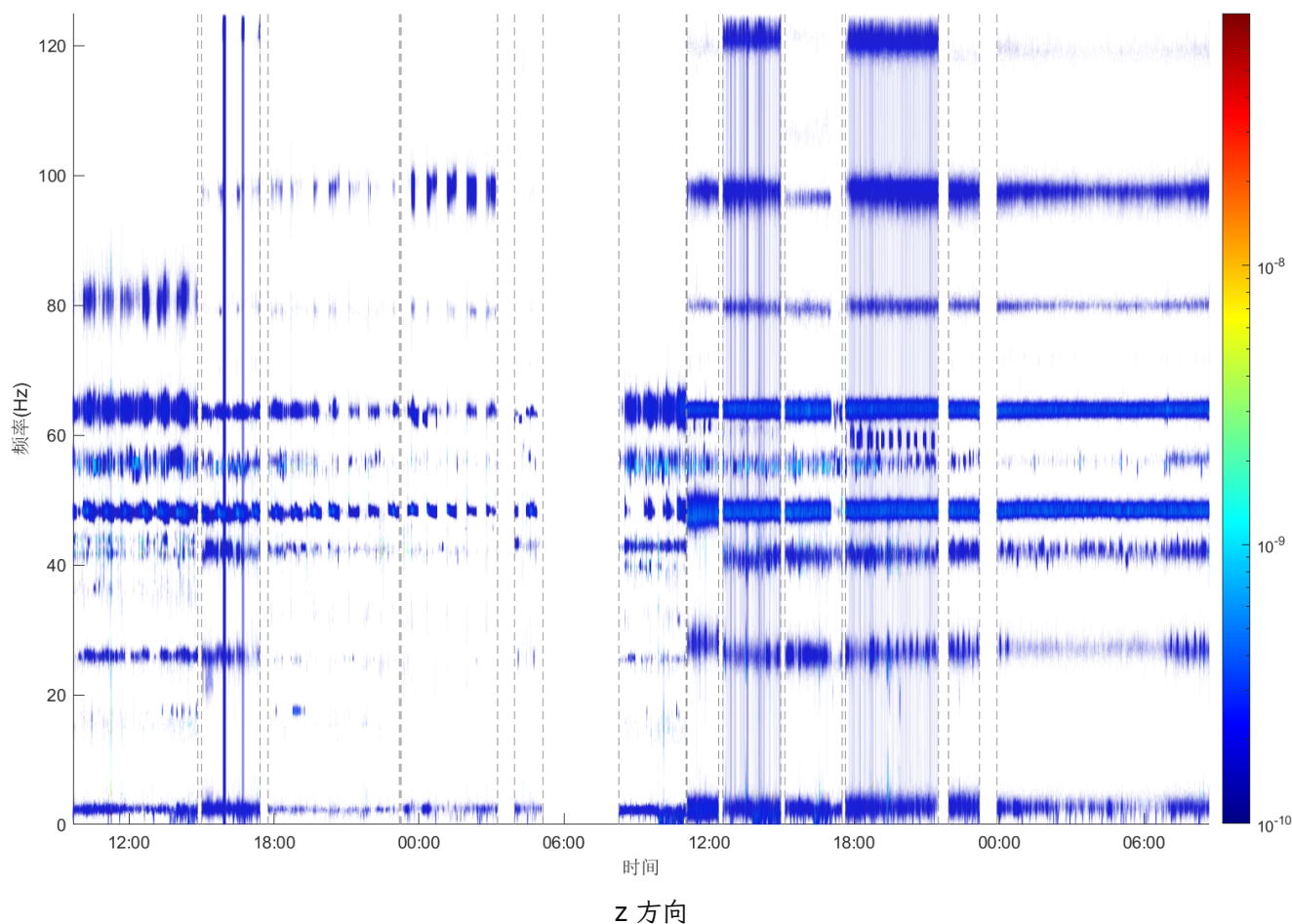


可以看到有几条比较明显频带，说明信号存在几个主导模态，且模态总体表现为稳定状态。幅值表示每个模态的频率分布情况，有几个时间段的幅值明显较大，如：10点到20点的数据波动比较大，而有几个时间段的幅值比较小，如20点到次日3点左右的数据波动比较小，存在明显的昼夜区别，也许是因为白天的噪声干扰比较多，夜晚的噪声干扰比较小。亮度表示模态对应的能量情况，整体能量比较低，部分模态能量比较高，尤其是在 50 Hz 左右的能量明显较高。

由于我们的数据不是连续，所以在相邻时间段内的频带分布不是连续的。自身频带具有一定的周期变动。周期大约在 45 分钟左右。

研究分析得到的主要模态频率有：2.5 Hz 48 Hz 55 Hz 64 Hz。比较特殊的是，在 55 Hz 附近会出现相近的模态频率，有可能是系统强行识别的结果，也有可能在这附近确实存在两个主导的模态，一个模态能量比较高，一个模态能量比较低。2.5 Hz 推测为人正常活动的特征，20Hz 推测为机器，

尽管 26 号和 27 号的模态分布总体呈现相似，但可以从图中看出，26 号的能量分布情况比较稀疏平稳，27号的能量分布比较密实，每个模态的幅值比较大，亮度也比较明显。



z 方向的模态分布规律与 x 方向的相似，但是 z 方向整体分布比较平稳，模态幅值比较小，更稳定。

不过与 x 方向不同的是 z 方向的图像中出现了多条垂直亮条，垂直亮条可能原因有机器发生了一些异常而造成突变，也有可能是在数据处理中透明度设定有关。

CWT

Method

小波变换中我们主要采用 cwt 方法，小波变化常用于分析信号，通过自适应的窗函数能有效从信号中提取信息。

连续小波变换

对于非平稳信号而言，傅里叶变换只能识别其包含的频率成分，但是无法分辨这些频率分量的出现时刻。一个解决方法是利用窗函数，一般而言。窄窗口时间分辨率高、频率分辨率低；宽窗口时间分辨率低，频率分辨率高。采用固定的窗口依旧无法满足捕捉非平稳信号变换中频率分量的要求，故采用自适应的传函数，这就是小波变换的思想。

连续小波定义为：

$$\text{CWT}(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

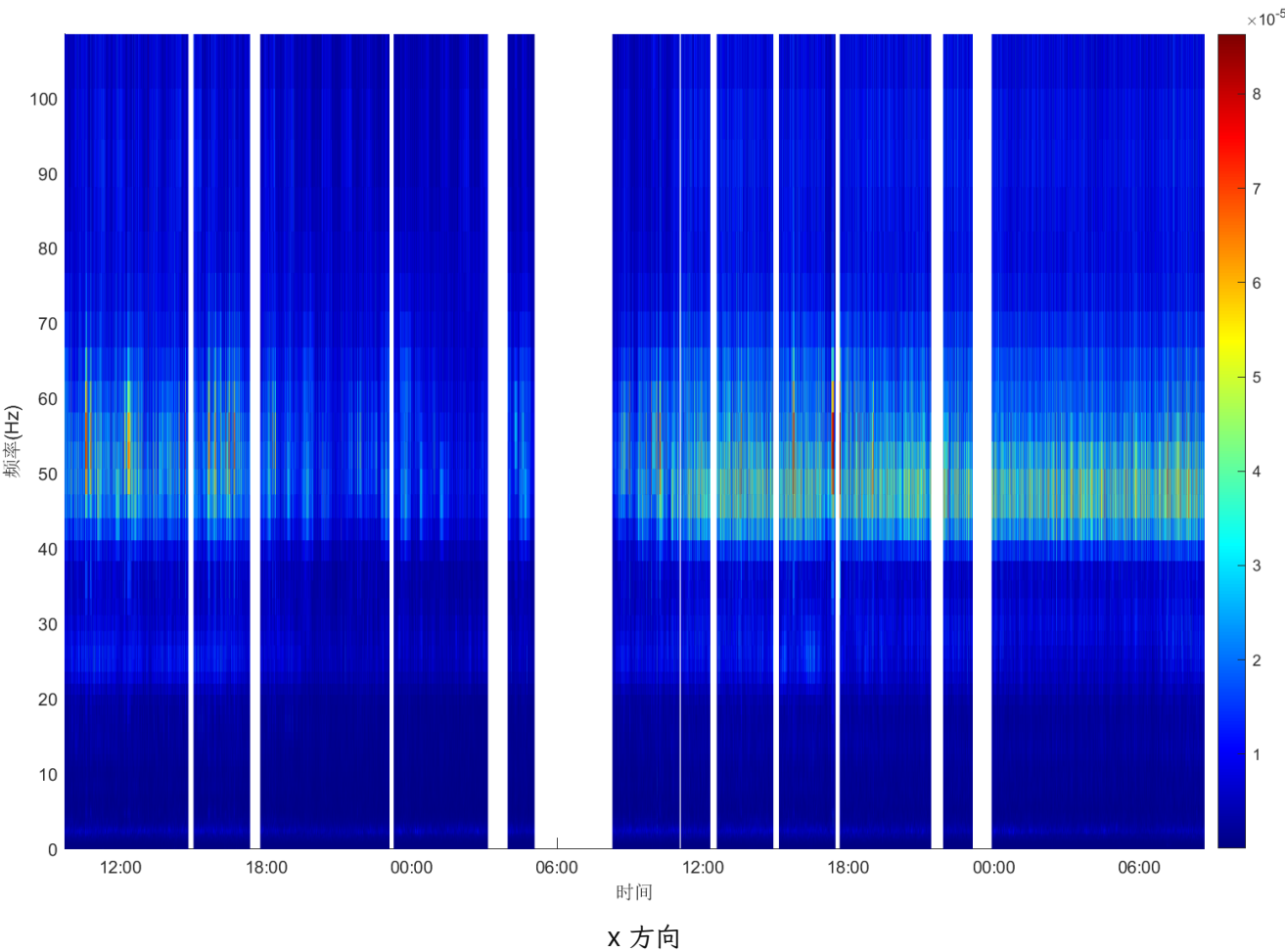
其中 $f(t)$ 表示信号函数， $\psi(t)$ 表示小波基函数， ψ^* 为小波函数的复共轭，其采用平移和伸缩的方法，实现对信号频率的捕捉和其对应时间区域的确定。常见的小波基函数有：morlet 小波函数，Gauss 小波函数等。

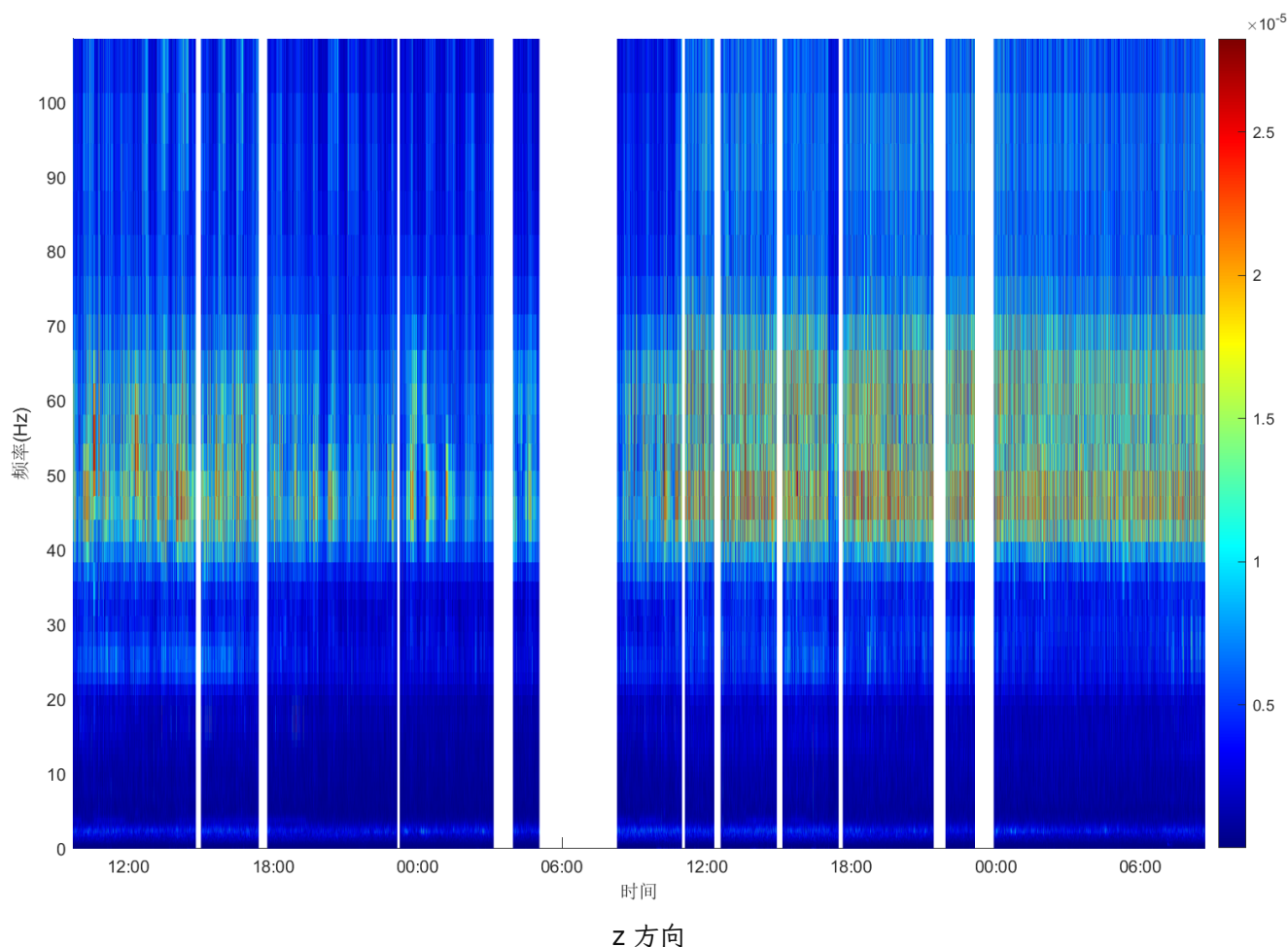
“ CWT就是选一个中心频率然后通过尺度变换得到一大堆中心频率，又通过时移得到一系列不同区间的基函数，分别和原始信号的某一段（对应基函数的区间）乘积再积分，产生的极值对应的频率就是原始信号这一区间含有的频率

连续小波变换的最大特点是多分辨率分析，实现时间空间上的局部化分析。

数据分析

对于数据，沿顺序抽取一万个数据做小波变换，从变换后的每隔25个数据存储一个数据（相当将采样时间延长至 0.1 s），这样方便我们处理 CWT 的结果。





同样可以看出，在早上10点到晚上20点左右能量亮度比较明显，说明此时能量比较强。经过小波变换处理后，总体的颜色亮度趋于一致。小波变换的结果中也有一定的周期性，只是效果没有 HHT 和 PSD 的那样明显。在小波变换后的结果中也能看出能量朝着40-70Hz、20-30Hz，2-3Hz个频率范围中集中，与经过 HHT 和 PSD 后的得到的图片相比频率分辨率较低。27 号以后的数据的规律性明显比 26 号的规律性弱，但是还是能够看出来能量看出的一般规律。

值得指出的是，频率分布之间存在一定交叠，尤其是 z 方向的比较明显。

不过从整体来看，经过小波变换后信号整体并没有太过于明显的特征，因此小波变换并不能给出太多的信息用于分析。

Conclusion

通过上述分析，发现信号能够被分解成几个主导的频带分布，主要的模态频率有：2Hz、27Hz、30Hz、42Hz、48Hz、55Hz、63Hz、79Hz、98Hz。同时信号呈现较为明显的昼夜规律，即白天的信号能量会高于夜晚的能量，且频带本身呈现出一定的周期变化，周期大约在 45 分钟左右。

在采用的三种分析方法中，HHT 和 PSD 方法均给出较为良好的结果，但是 CWT 方法囿于频率分辨率等因素所展现出的规律性比较弱，频带混叠较为严重，但仍符合总体规律。

无论是 HHT 还是 PSD 谱，主导的模态分布是相近的，进一步说明信号能够被分解成几个确定的主导模态。但是从 PSD 谱中的到的结果更为明显且稳定，而 HHT 对应模态的频带呈现

一定不连续现象，这是可能是因为 HHT 分析过程中对数据存在截断操作，不连续数据会导致 HHT 在不同的数据段上计算出不同的中心频率。